

Étude d'une fonction trigonométrique

Ce qu'évalue le contrôle : étude d'une fonction trigonométrique

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **2 heures**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Fonctions sinus et cosinus (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Démontrer qu'une fonction est paire, impaire ou périodique pour réduire l'intervalle d'étude
- Dériver des fonctions composées de sinus et de cosinus
- Étudier le signe d'une dérivée trigonométrique à l'aide du cercle et dresser le tableau de variations
- Démontrer une inégalité en étudiant une fonction auxiliaire
- Résoudre une inéquation trigonométrique dans un problème de grande roue

Avant de commencer

Commence par l'exercice 1, car les symétries servent ensuite dans l'étude de fonction. Pour

dériver, repère d'abord la **fonction intérieure** et n'oublie pas de multiplier par sa dérivée. Pour le signe d'un produit, étudie chaque facteur séparément, puis lis les intervalles sur le **cercle trigonométrique**. Enfin, vérifie tes valeurs du tableau sur la courbe fournie.

Le sujet du contrôle : étude d'une fonction trigonométrique

Exercice 1 - Symétries et période (3 points)

Les trois fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$. Pour chacune, justifie la propriété demandée par un calcul.

1. Soit $f(x) = \cos(3x) + 1$. Montre que f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$. (1 point)
2. Soit $g(x) = x \sin(x)$. Démontre ensuite que g est paire. (1 point)
3. Soit $k(x) = \sin(x) \cos^2(x)$. Prouve que k est impaire, puis donne la symétrie de sa courbe. (1 point)

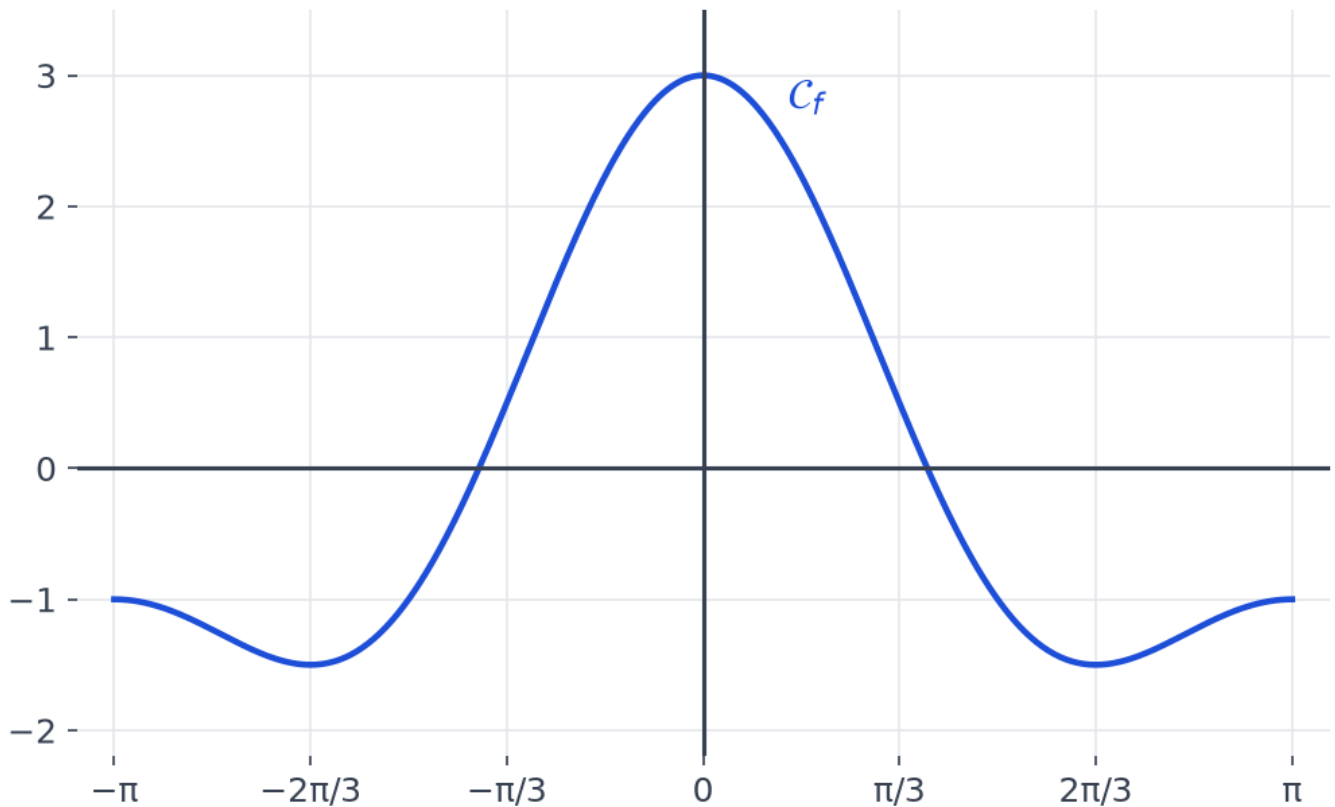
Exercice 2 - Dériver sinus et cosinus (3 points)

Calcule la dérivée de chaque fonction, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, puis simplifie le résultat.

1. $f_1(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ (1 point)
2. $f_2(x) = \cos^2(x)$, en écrivant la dérivée à l'aide de $\sin(2x)$ (1 point)
3. $f_3(x) = \frac{\sin(x)}{2 \cos(x) + 1}$, en montrant que le numérateur de la dérivée vaut $2 \cos(x) + 1$ (1 point)

Exercice 3 - Étude de $2\cos(x) + \cos(2x)$ (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(x) + \cos(2x)$. Sa courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.



On rappelle que, pour tout réel x , $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

1. Montre que f est périodique de période 2π et paire. Explique alors pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$. (1 point)
2. Démontre que, pour tout réel x , $f'(x) = -2\sin(x)(1 + 2\cos(x))$. (1,5 point)
3. Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$ à l'aide du cercle trigonométrique. Dresse ensuite le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$, avec les valeurs exactes. (2 points)
4. Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; \pi]$ et donne un encadrement de α d'amplitude $0,01$. Combien de solutions possède cette équation sur $[-\pi; \pi]$? (1,5 point)

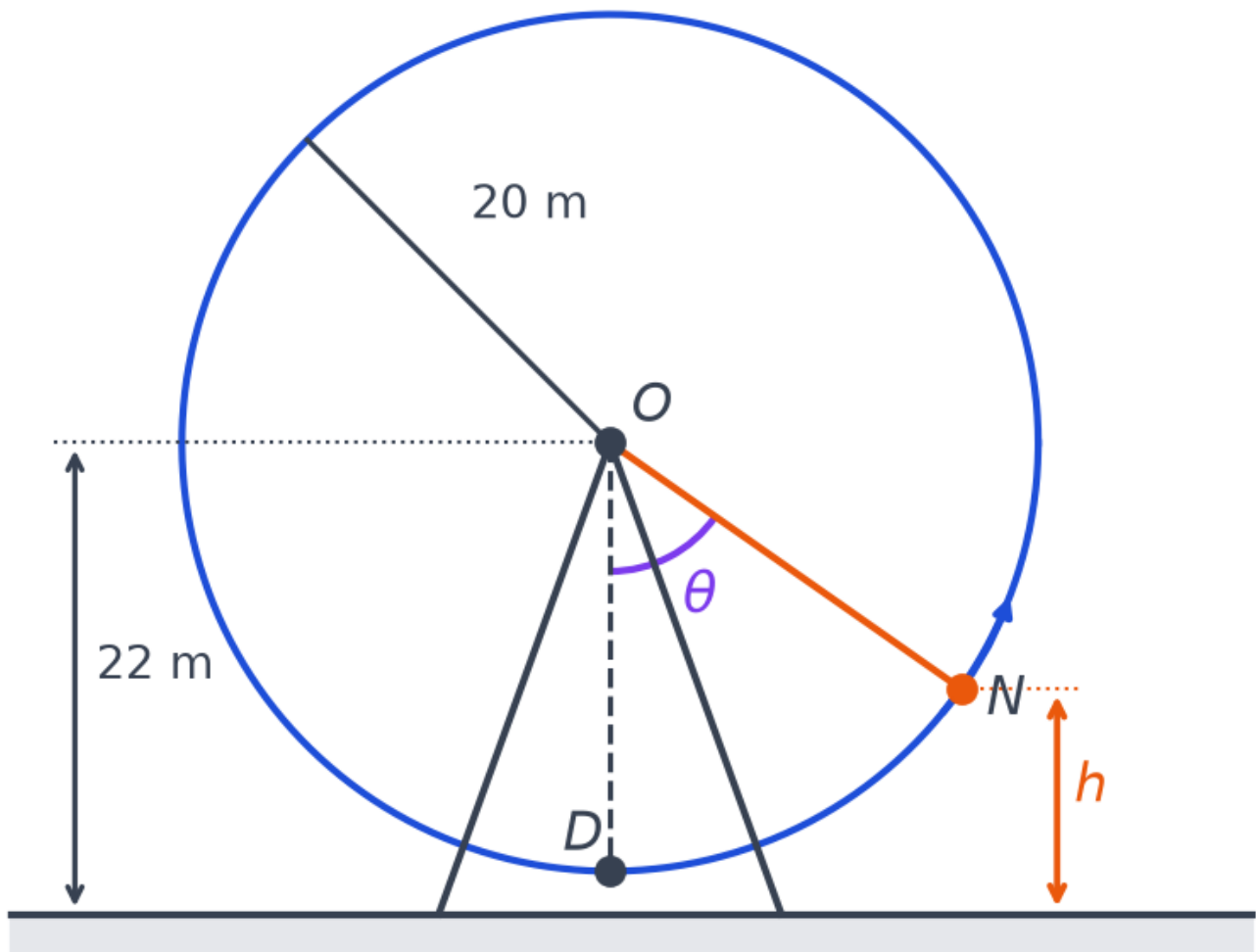
Exercice 4 - Une inégalité à démontrer (3 points)

On définit la fonction g sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x - \sin(x)$.

1. Calcule $g'(x)$, puis justifie que g est croissante sur $[0; +\infty[$. (1 point)
2. Dédus-en que, pour tout réel $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$. (1 point)
3. Montre enfin que, pour tout réel $x \geq 0$, $g(x) \geq x - 1$, et trouve la limite de g en $+\infty$. (1 point)

Exercice 5 - La grande roue de la fête (5 points)

Une grande roue a un rayon de 20 m et son centre O se trouve à 22 m du sol. Au départ, la nacelle de Chloé est au point le plus bas D. Puis la roue tourne à vitesse constante et fait un tour complet en 8 minutes.



Après t minutes, la nacelle se trouve en N et la roue a tourné d'un angle θ , en radians. On admet que la hauteur de N au-dessus du sol vaut $22 - 20\cos(\theta)$ mètres.

1. Explique pourquoi $\theta = \frac{\pi t}{4}$. On note donc $h(t) = 22 - 20\cos(\frac{\pi t}{4})$ pour $t \in [0; 8]$. Calcule $h(0)$ et $h(4)$, puis interprète ces valeurs. (1 point)
2. Calcule $h'(t)$ et étudie son signe sur $[0; 8]$. Déduis-en les variations de h . (1,5 point)
3. Chloé voit le lac quand sa nacelle est à au moins 32 m du sol. Résous l'inéquation $h(t) \geq 32$ sur $[0; 8]$, puis donne la durée, en minutes et secondes, pendant laquelle elle voit le lac. (2 points)
4. Quelle est la hauteur de la nacelle au bout d'une minute ? Donne la valeur exacte, puis l'arrondi au centimètre. (0,5 point)



Réviser étude d'une fonction trigonométrique avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon fonctions cosinus et sinus ; entraîne-toi sur la fiche fonctions sinus et cosinus avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Dérivées de sinus et cosinus : contrôle de maths en terminale
- Équation cartésienne d'un plan : contrôle de maths en terminale
- Primitives de fonctions usuelles : contrôle de maths en terminale