

Étude de fonction avec logarithme

Ce qu'évalue le contrôle : étude de fonction avec logarithme

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Fonction logarithme népérien (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Dériver des fonctions construites avec le logarithme népérien, dont $\ln(u)$ et des quotients
- Calculer des limites aux bornes en levant une forme indéterminée par croissances comparées
- Dresser le tableau de variations d'une fonction et en déduire le nombre de solutions d'une équation
- Étudier la convexité d'une fonction et exploiter la position de la courbe par rapport à une tangente
- Modéliser un bénéfice par une fonction logarithme et déterminer les seuils de rentabilité

Avant de commencer

Avant tout calcul, **précise l'ensemble de définition** : $\ln$ n'existe que pour des nombres strictement positifs. Pour le signe d'une dérivée, mets-la d'abord sous forme d'un seul quotient, puis étudie le numérateur, car le dénominateur est souvent positif. Quand tu appliques le théorème des valeurs intermédiaires, cite la **continuité** et la **stricte monotonie** sur chaque intervalle. Enfin, vérifie tes encadrements sur la courbe fournie.

Le sujet du contrôle : étude de fonction avec logarithme

Exercice 1 - Dérivées avec le logarithme (3 points)

Pour chaque fonction, justifie d'abord qu'elle est dérivable sur l'intervalle indiqué, puis calcule sa dérivée et donne-la sous forme factorisée.

1. $f_1(x) = x^2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$. (1 point)
2. $f_2(x) = \ln(x^2 + 3)$ sur $\mathbb{R}$. (1 point)
3. $f_3(x) = \left[\frac{1}{x}\right] \ln x x^2$ sur $]0; +\infty[$. (1 point)

Exercice 2 - Limites et croissances comparées (3 points)

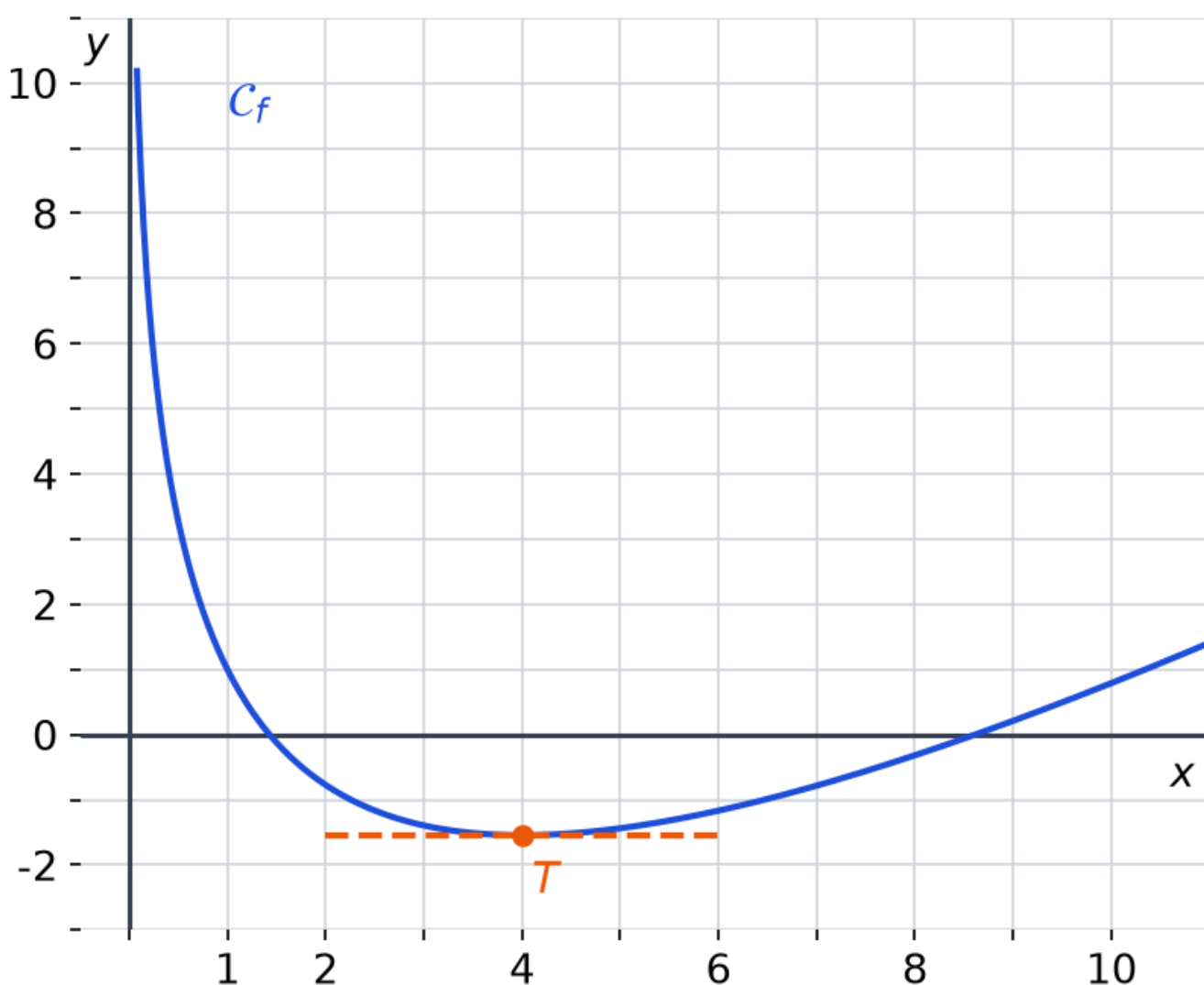
Détermine les limites suivantes. Quand tu rencontres une forme indéterminée, nomme-la avant de la lever.

1. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (x^2 - 3 \ln x)$ (0,5 point)
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3 \ln x)$, en factorisant par x . (1 point)
3. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (x \ln x + 2)$ (0,5 point)

4. Les limites de $h(x) = \left[\frac{?}{?}\right]1 + \ln x$ en 0 par valeurs positives, puis en $+\infty$. (1 point)

Exercice 3 - Étude d'une fonction et de ses zéros (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 4\ln x$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. De plus, la droite T tracée en pointillés est la tangente horizontale à $\mathcal{C}_f$.



1. Calcule la limite de f en 0, puis sa limite en $+\infty$ en écrivant $f(x) = x(1 - 4\left[\frac{?}{?}\right]\ln x)$. (1,5 point)
2. Montre que $f'(x) = \left[\frac{?}{?}\right]x - 4$, étudie son signe, puis complète le tableau de

variations ci-dessous. Donne la valeur exacte du minimum sous la forme $a+b\ln 2$. (1,5 point)

x	0	...	$+\infty$
signe de $f'(x)$	...	...	...
variations de f	...	...	...

3.

- Démontre que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β , avec $\alpha < 4 < \beta$. (1 point)
- À l'aide de la calculatrice, donne un encadrement de α et de β d'amplitude 10^{-2} . (0,5 point)

4.

- Calcule $f''(x)$, puis étudie la convexité de f . (0,5 point)
- Détermine une équation de la tangente D à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. (0,5 point)
- Déduis-en que, pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. (0,5 point)

Exercice 4 - Une équation à paramètre (4 points)

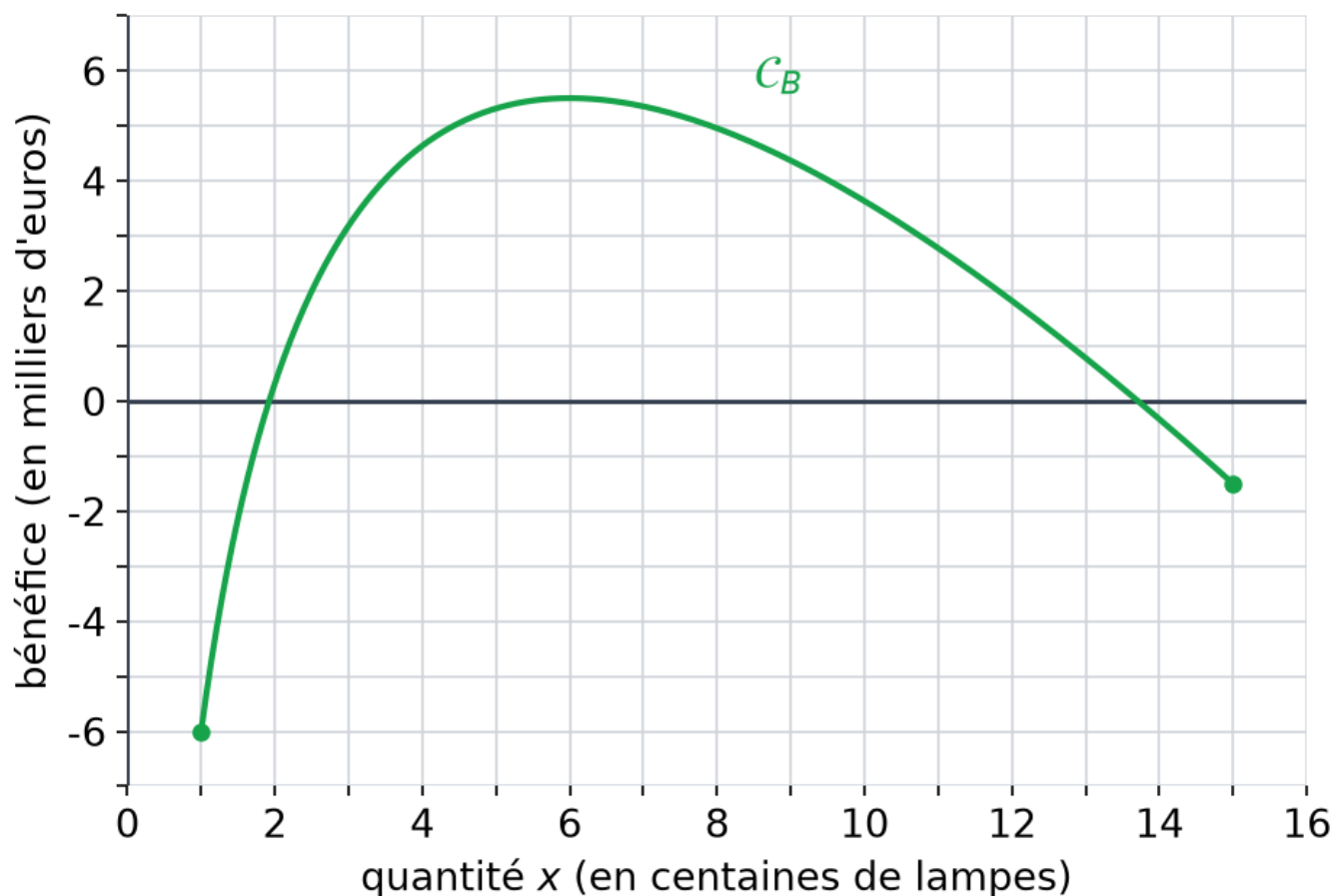
On considère maintenant g , la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x} \ln x$, et m un nombre réel.

1. Calcule $g'(x)$, puis dresse le tableau de variations de g en précisant la valeur exacte de son maximum. (1,5 point)
2. Détermine ensuite les limites de g en 0 et en $+\infty$. (1 point)
3. Selon les valeurs de m , indique le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$ sur $]0; +\infty[$. Justifie ta discussion, car chaque cas compte. (1 point)
4. Vérifie que $g(2) = g(4)$. Quelles sont alors toutes les solutions de l'équation $g(x) = \frac{1}{2} \ln 2$? (0,5 point)

Exercice 5 - Le bénéfice d'un atelier de lampes (4 points)

Un atelier artisanal fabrique chaque mois entre 100 et 1 500 lampes de bureau. Quand il en produit et vend x centaines, avec $x \in [1; 15]$, son bénéfice mensuel, en milliers d'euros, vaut :

$$B(x) = 12 \ln x - 2x - 4$$



1. Étudie les variations de B sur $[1;15]$. Combien de lampes l'atelier doit-il donc fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal ? Donne ce bénéfice arrondi à l'euro. (1,5 point)
2.
 - a. Démontre que l'équation $B(x)=0$ admet une solution x_1 dans $[1;6]$ et une solution x_2 dans $[6;15]$. (1 point)
 - b. Donne un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_1 et de x_2 . Ainsi, pour quels nombres de lampes l'atelier est-il rentable ? (1 point)
3. Montre que B est concave sur $[1;15]$. Que peut-on dire alors du bénéfice supplémentaire apporté par chaque centaine de lampes quand la production augmente ? (0,5 point)



Réviser étude de fonction avec logarithme avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon fonction logarithme népérien ; entraîne-toi sur la fiche logarithme népérien avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Fonction logarithme népérien : contrôle de maths en terminale
- Suites et logarithme népérien : contrôle de maths en terminale
- Équations paramétriques de droites : contrôle de maths en terminale