

Exponentielle et modèles d'évolution

Ce qu'évalue le contrôle : exponentielle et modèles d'évolution

L'essentiel du sujet

- Niveau **première**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Fonction exponentielle (4 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Reconnaître une suite géométrique de la forme $\exp(na)$ et donner sa raison
- Dériver une fonction de la forme $t \mapsto C \exp(kt) + D$ et en déduire ses variations
- Interpréter un modèle exponentiel : valeur initiale, limite suggérée, pourcentage de baisse
- Déterminer un seuil avec la calculatrice ou par lecture graphique
- Comparer des mesures expérimentales aux valeurs d'un modèle

Avant de commencer

Avant chaque calcul, relis l'**unité du temps** : minutes pour la boisson, heures pour le médicament et les bactéries. Pour dériver, applique la règle $(e^{kt})' = k e^{kt}$, puis rappelle que $e^{kt} > 0$ pour conclure sur le signe. Quand tu cherches un seuil, dresse un petit **tableau de**

valeurs à la calculatrice et encadre la réponse. Enfin, termine chaque question par une phrase qui répond au contexte.

Le sujet du contrôle : exponentielle et modèles d'évolution

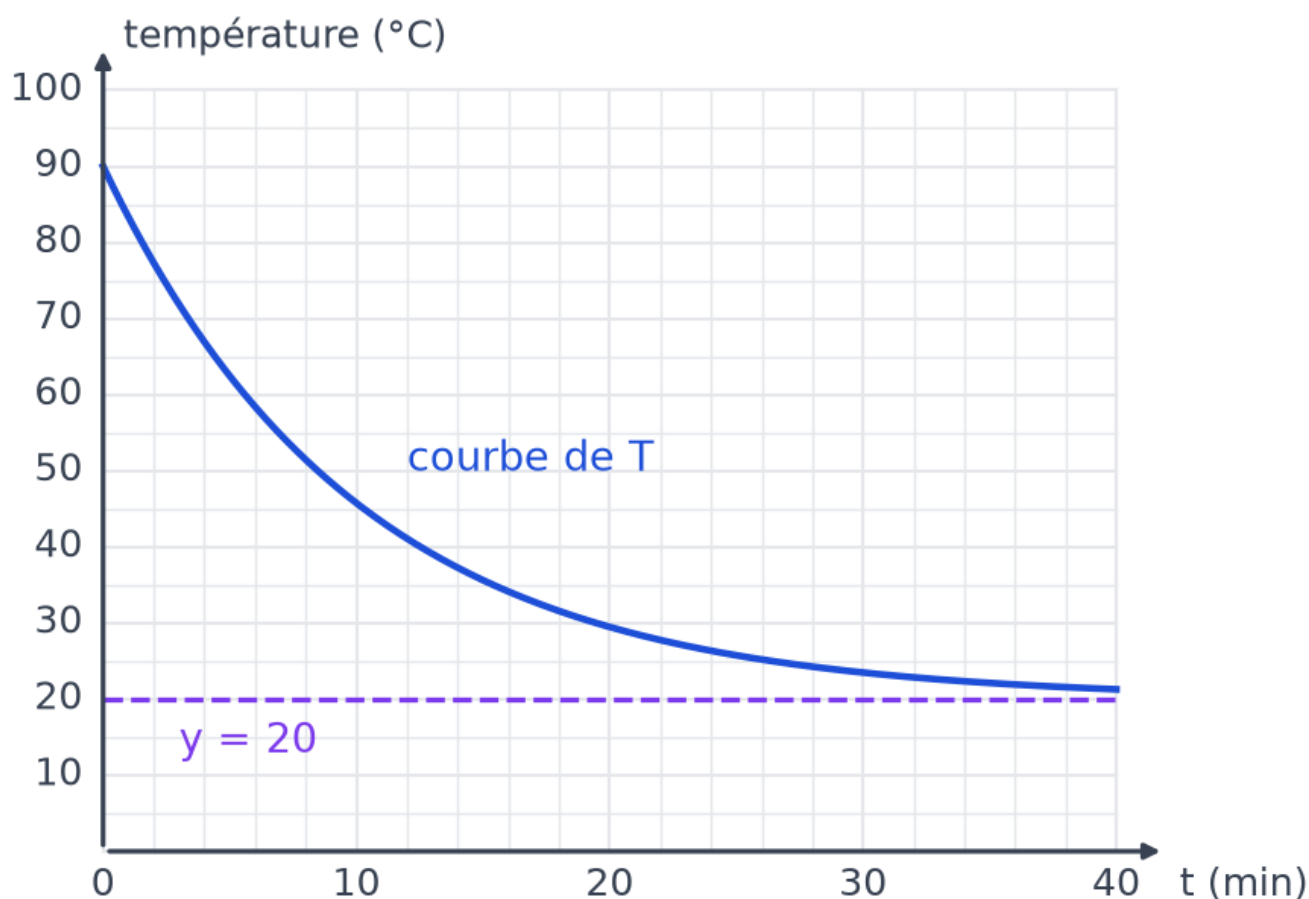
Exercice 1 - Des suites venues de l'exponentielle (4 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{0,2n}$.

1. Calcule u_0 , puis donne la valeur exacte de u_5 et une valeur approchée au centième. (1 point)
2. Démontre ensuite que la suite (u_n) est géométrique, puis précise sa raison. (1 point)
3. Déduis-en le sens de variation de (u_n) . (1 point)
4. On pose ensuite $v_n = 5e^{-0,5n}$. Donne la nature de (v_n) , son premier terme, sa raison et son sens de variation. (1 point)

Exercice 2 - Le chocolat chaud qui refroidit (6 points)

Maëlle pose une tasse de chocolat chaud sur la table d'une pièce à 20 °C. Ainsi, la température du chocolat, en degrés Celsius, t minutes plus tard, est modélisée par $T(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$ pour $t \geq 0$. La courbe de T est tracée ci-dessous, avec la droite d'équation $y = 20$ en pointillés.



1. Tout d'abord, quelle est la température du chocolat au moment où Maëlle le sert ? (0,5 point)
2. Calcule $T'(t)$, puis étudie son signe. Déduis-en le sens de variation de T sur $[0; +\infty[$. (1,5 point)
3. Calcule alors la température au bout de 10 minutes, arrondie au dixième de degré. (1 point)
4. Par lecture graphique, estime à la minute près le moment où le chocolat atteint 60 °C. (1 point)
5. Maëlle boit son chocolat quand il descend sous 50 °C. Avec la calculatrice, détermine le premier nombre entier de minutes à partir duquel $T(t) < 50$. (1 point)
6. Démontre que $T(t) > 20$ pour tout $t \geq 0$, puis interprète ce résultat et la droite en pointillés. (1 point)

Exercice 3 - Un médicament dans le sang (5 points)

Après une injection, la concentration d'un médicament dans le sang de Nathan, en milligrammes par litre, est modélisée par $C(t) = 12e^{-0,25t}$, où t est le temps écoulé en heures.

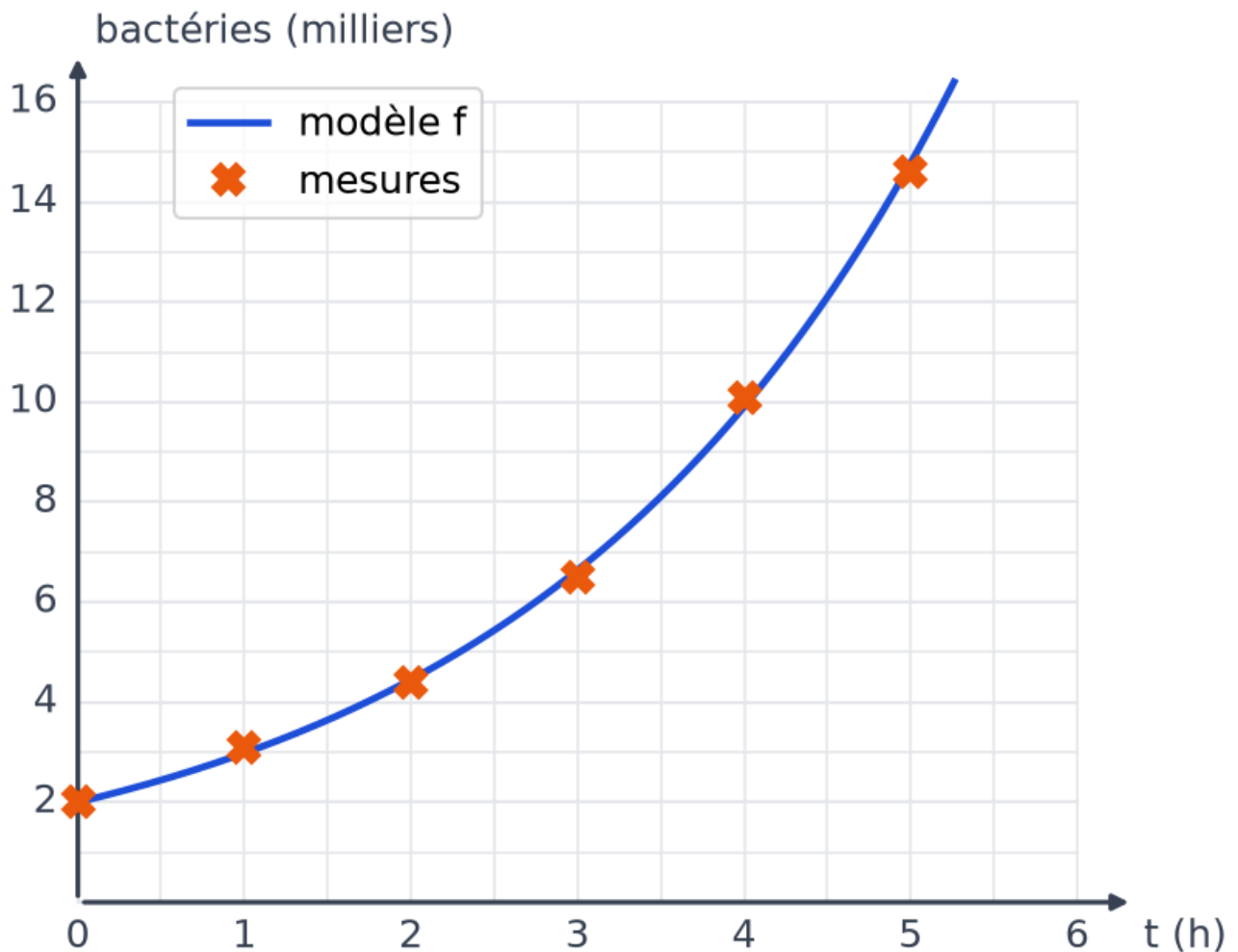
1. D'abord, donne la concentration juste après l'injection. (0,5 point)
2. Montre que, pour tout $t \geq 0$, $C(t+4) = e^{-1} \times C(t)$. Traduis ensuite ce résultat par un pourcentage de baisse toutes les 4 heures, arrondi à 0,1 %. (1,5 point)
3. Étudie aussi le sens de variation de C sur $[0; +\infty[$. (1 point)
4. On note $c_n = C(n)$ la concentration après n heures. Justifie que (c_n) est géométrique, puis donne le pourcentage de baisse par heure, arrondi à 0,1 %. (1 point)
5. Le médicament reste efficace tant que la concentration vaut au moins 3 mg/L. Avec la calculatrice, donne un encadrement d'amplitude 0,1 heure de la durée d'efficacité. (1 point)

Exercice 4 - La culture de bactéries (5 points)

Dans un laboratoire, Inès compte les bactéries d'une culture toutes les heures. Ainsi, le tableau donne ses mesures, en milliers de bactéries.

Temps t (en heures)	0	1	2	3	4	5
Mesure (en milliers)	2,0	3,1	4,4	6,5	10,1	14,6

Elle propose alors le modèle $f(t) = 2e^{0,4t}$, en milliers de bactéries. Par ailleurs, le graphique compare les mesures et la courbe de f .



1. Calcule les valeurs du modèle $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ et $f(5)$, arrondies au dixième. (1,5 point)
2. Inès juge le modèle acceptable si l'écart entre chaque mesure et la valeur du modèle reste inférieur à 0,5 millier. Le modèle est-il acceptable ? Justifie. (1 point)
3. Calcule $f'(t)$, puis déduis-en le sens de variation de f . (1 point)
4. Selon ce modèle, au bout de combien d'heures entières la culture dépasse-t-elle 50 milliers de bactéries ? Justifie à l'aide de deux valeurs calculées. (1,5 point)



Réviser exponentielle et modèles d'évolution avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon fonction exponentielle avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en première** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Propriétés de l'exponentielle : contrôle de maths en première
- Suites géométriques et exponentielle : contrôle de maths en première
- Position relative de deux courbes : contrôle de maths en première