

Fonction exponentielle

I. La fonction exponentielle

Lemme :

Si il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0)=1$ alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Théorème :

Il existe une unique fonction f dérivable sur telle que $f' = f$ et $f(0)=1$.

Définition :

On appelle **fonction exponentielle**, notée $\exp$, l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f' = f$ et $f(0)=1$. Nous noterons cette fonction définie par $f(x) = e^x$ et $e^0 = 1$.

II. Les propriétés de la fonction exponentielle

Théorème :

On considère deux nombres réels x et y . Nous avons $e^{x+y} = e^x e^y$.

Exemple :

$$e^{5+2} = e^5 e^2$$

Propriétés :

On considère deux nombres réels x et y et n un entier naturel. Nous avons les propriétés suivantes :

- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$;
- $e^{nx} = (e^x)^n$

Exemple :

$$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\frac{e^7}{e^5} = e^{7-5} = e^2$$

III. Etude de la fonction exponentielle

1. Le signe et ses variations

Propriété :

On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$;

- f est strictement positive sur $\mathbb{R}$;
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Les limites en l'infini

Propriété :

On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

Nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$.

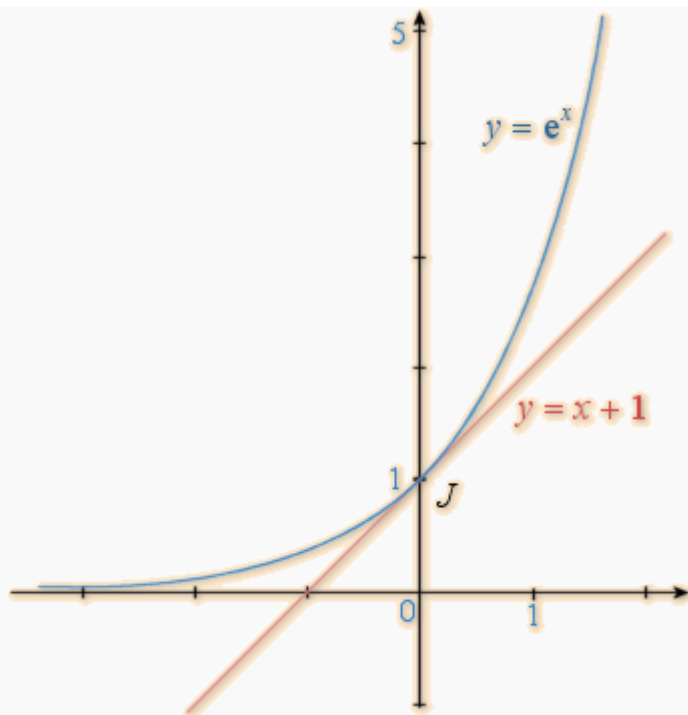
3. Tableau de variation et courbe représentative

Propriété :

On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	0	$+\infty$





Remarques :

La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction exponentielle en $-\infty$.

La droite d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de la fonction exponentielle en 0 .

3. Equations et inéquations

Propriété :

On considère deux nombres réels x et y . $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

$$x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$$

Autre version de cette leçon

I. Définition et variations de la fonction exponentielle.

Définition :

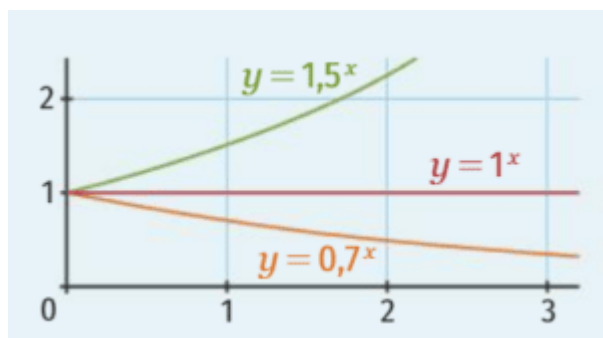
Soit a un réel strictement positif.

Une fonction f définie pour tout réel $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$ est une **fonction exponentielle**.

Propriété :

Une fonction exponentielle f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$ avec $a > 0$ est :

1. strictement croissante sur $[0; +\infty[$ si, et seulement si, $a > 1$;
2. strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ si, et seulement si, $0 < a < 1$;
3. constante sur $[0; +\infty[$ si, et seulement si, $a = 1$.



II. Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

Propriétés :

Pour tous réels positifs x et y et pour tous réels strictement positifs a et b , on a :

1. $a^x \times a^y = a^{x+y};$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} ;$
3. $(a^x)^y = a^{x \times y};$
4. $a^x \times b^x = (a \times b)^x;$
5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$

Propriété : cas de la puissance $\frac{1}{n}$.

Soient a et x deux nombres réels strictement positifs et n un nombre entier non nul.

L'équation $x^n = a$ admet comme unique solution positive le réel $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ appelée **racine n-ième** de a .

Propriété :

Si une grandeur subit une évolution de taux t , alors elle atteint la même valeur en subissant n évolutions successives de même taux $(1+t)^{\frac{1}{n}} - 1$ où n un nombre entier naturel non nul.

Définition:

Le nombre $(1+t)^{\frac{1}{n}} - 1$ est appelé taux moyen des n évolutions successives de taux global t .

