

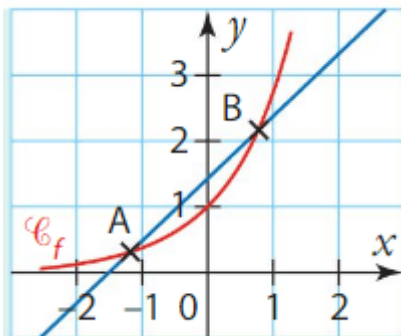
Fonctions convexe ou concave

I. Convexité d'une fonction

1. Sécante à la courbe représentative d'une fonction.

Définition :

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.
Soit A et B deux points de C_f alors la droite (AB) est **sécante** de C_f .



2. Convexité et concavité.

Définitions :

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On dit que :

1. f est convexe sur un intervalle I si, pour tout réel x de I , C_f est en dessous de ses sécantes.
2. f est concave sur un intervalle I si, pour tout réel x de I , C_f est au-dessus de ses sécantes.

3. les fonctions usuelles.

Propriété :

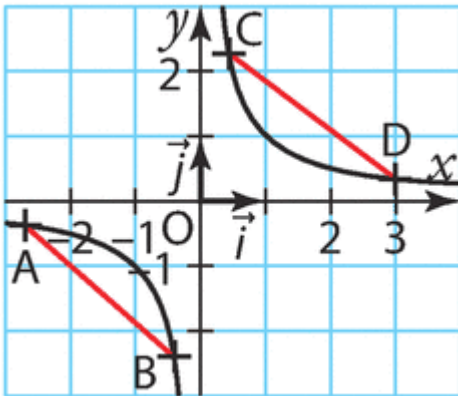
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave.

Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.



Alors le segment $[CD]$ est au-dessus de la courbe de C_f pour x strictement positif donc f est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$ et le segment $[AB]$ est en dessous de la courbe C_f pour x strictement négatif donc f est concave sur $\mathbb{R}^{-*}$.

4.Position par rapport aux sécantes.

Propriété :

- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0; 1]$, on a :
$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$
- Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0; 1]$, on a :
$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

Démonstration :

Soient deux réels x et y et soit $t \in [0; 1]$.

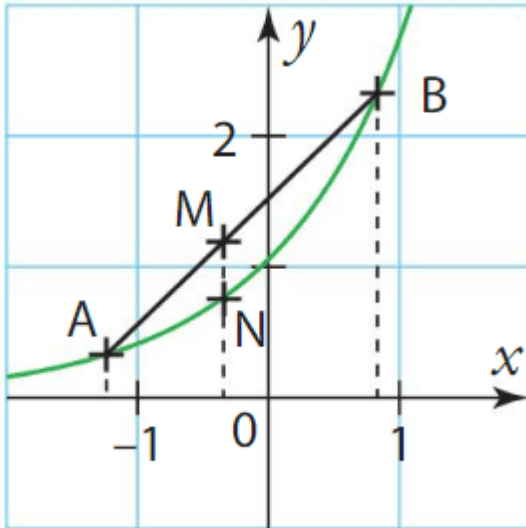
Soit $A(x; f(x))$ et $B(y; f(y))$; Alors le point

$M(tx + (1 - t)y; tf(x) + (1 - t)f(y))$ appartient au segment $[AB]$, sécante de C_f .

f étant convexe, cette sécante est située au-dessus de C_f .

M est donc situé au-dessus du $M(tx + (1 - t)y; f(tx + (1 - t)y))$.

D'où $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$.



Remarque :

Si les inégalités précédentes sont strictes, on dira que f est une **fonction strictement convexe ou strictement concave** sur I .

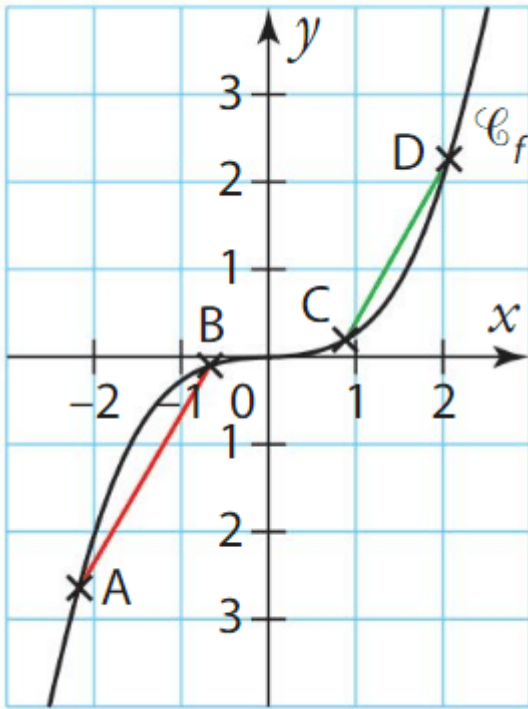
Propriété : concavité.

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave.

Exemple :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^x$.

La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe, donc $f : x \mapsto -e^x$ est concave.



II. Fonction convexe et dérivées première et seconde

1. Fonction convexe et fonction concave.

Théorème :

Soit I un intervalle réel.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.

- f est convexe sur I , si et seulement si, pour tout réel x de I , f' est croissante.
- f est concave sur I , si et seulement si, pour tout réel x de I , f' est décroissante.

Exemple :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a dressé le tableau de variations de la fonction f' .

Démonstration :

f' est croissante (resp. décroissante) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).
Donc f est convexe (resp. concave) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

III. Tangente et point d'inflexion

1. Dérivée seconde et tangente.

Propriété :

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable sur I de dérivée seconde f'' .

Si f'' est positive sur I , alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Preuve :

Soit ϕ la fonction définie sur I par la différence entre la fonction et sa tangente.

$$\phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0).$$

Alors ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :

$$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0).$$

Or f'' est positive donc f' est croissante. D'où :

si $x \geq x_0$ alors $f'(x) \geq f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geq 0$.

si $x \leq x_0$ alors $f'(x) \leq f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leq 0$.

$$\text{De plus, } \phi(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$$

On obtient le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $\phi'(x)$	-		+
Variations de ϕ			

Donc, pour tout réel x de I , $\phi(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ autrement dit, la

courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Conclusion :

Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Remarques :

1. Si f'' est négative sur I alors la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.
2. Attention à la réciproque, une fonction convexe n'est pas obligatoirement deux fois dérivable.

2. Point d'inflexion à la courbe représentative d'une fonction.

Définition :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative sur cet intervalle

dans un repère orthonormé du plan.

Soit A un point de C_f et T_A la tangente C_f au point A .

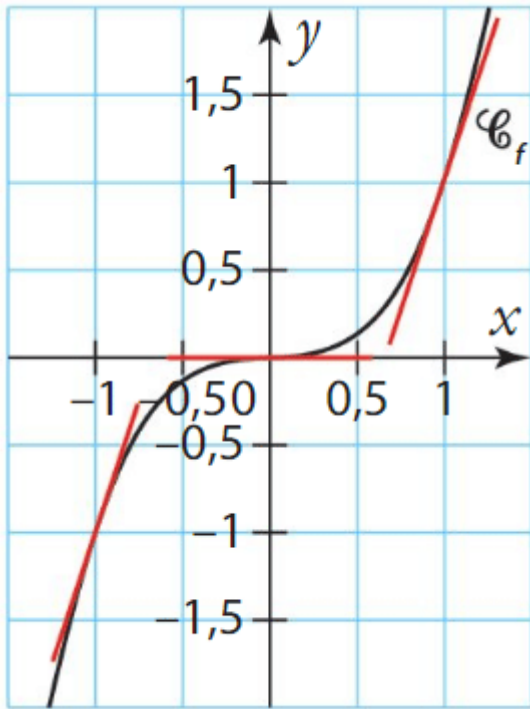
On dit que A est un point d'inflexion pour C_f si, au point A , la courbe C_f traverse T_A .

Exemple :

Soit f la fonction cube et C_f sa courbe représentative dans un repère.

Alors l'origine du repère $O(0; 0)$ est un point d'inflexion pour C_f .

En revanche les tangentes en -1 et en 1 ne traversent pas la courbe, les points de coordonnées $(-1; f(-1))$ et $(1; f(1))$ ne sont donc pas des points d'inflexion.



Propriété :

Pour qu'il y ait point d'inflexion, il faut que f'' change de signe donc que f' change de variation.

Exemple :

Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.

Donc $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ et $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Il y a changement de signe de la dérivée seconde, donc f change de convexité, il y a donc en $O(0; 0)$ un point d'inflexion.