



Fonctions

Les fonctions jouent un rôle central dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment le calcul, l'algèbre et la théorie des nombres. Elles sont utilisées pour modéliser les relations entre les variables, pour décrire des formes et des structures géométriques, et pour analyser des modèles et des données. Parmi les types de fonctions les plus courants, citons les fonctions polynomiales, exponentielles, trigonométriques et logarithmiques.

I. Notion de fonction :

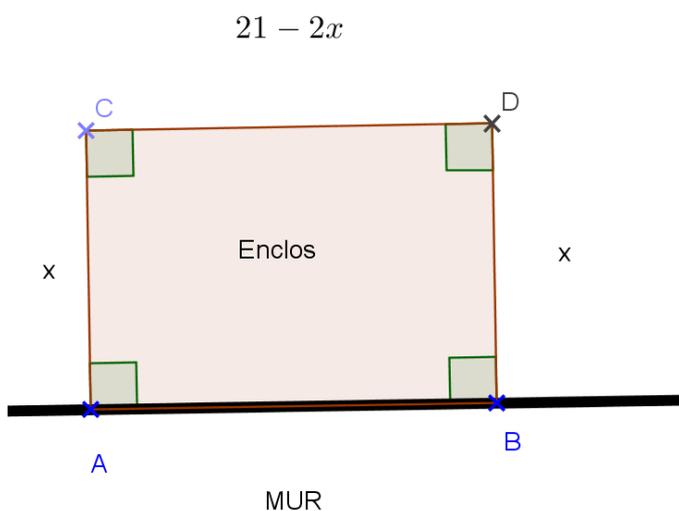
1. Activité d'introduction :

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire le long d'un mur pour son chien de garde.

Il dispose d'un grillage ayant une longueur de 21 mètres.

Il souhaite maximiser l'espace pour son chien et veut utiliser l'intégralité du grillage.

La largeur de l'enclos doit être inférieure à 10,5 mètres.



1. Notons x la largeur de l'enclos.

Quelle est l'expression de la longueur de l'enclos en fonction de x ?

$$L = 21 - 2x$$

2. Quelle est l'expression développée et réduite de l'aire A de cet enclos ?

$$A = l \times L = x(21 - 2x) = 21x - 2x^2 = -2x^2 + 21x$$

3. Calculer l'aire de l'enclos pour $x = 0 \text{ m}$; $x = 1 \text{ m}$; $x = 3 \text{ m}$; $x = 7 \text{ m}$; $x = 10,5 \text{ m}$.

Pour $x = 0 \text{ m}$: $A = l \times L =$

Pour $x = 1 \text{ m}$: $A = l \times L = -2 \times 1^2 + 21 \times 1 = -2 + 21 = 19 \text{ m}^2$.

Pour $x = 3 \text{ m}$: $A = l \times L = -2 \times 3^2 + 21 \times 3 = -18 + 63 = 45 \text{ m}^2$.

Pour $x = 7 \text{ m}$: $A = l \times L = -2 \times 7^2 + 21 \times 7 = -98 + 147 = 49 \text{ m}^2$.

Pour $x = 10,5 \text{ m}$: $A = l \times L = -2 \times 10,5^2 + 21 \times 10,5 = -220,5 + 220,5 = 0 \text{ m}^2$.

4. On met en place un processus mathématique, noté f , que l'on appelle **fonction**.

On décide d'associer à chaque largeur x , l'unique aire de l'enclos notée $f(x)$.

Nous avons mis en place la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (\mapsto se lit associe).

Quelle est l'expression littérale de f ?

Nous avons montré précédemment que $f(x) = -2x^2 + 21x$.

5. Calculer $f(7)$ qui est l'image de 7 par la fonction f .

$$f(7) = -2 \times 7^2 + 21 \times 7 = -98 + 147 = 49 \text{ m}^2$$

Remarque :

Nous avons déjà calculé cette valeur, en effet lorsque la largeur est de 7 m, l'aire de l'enclos est de 49 m².

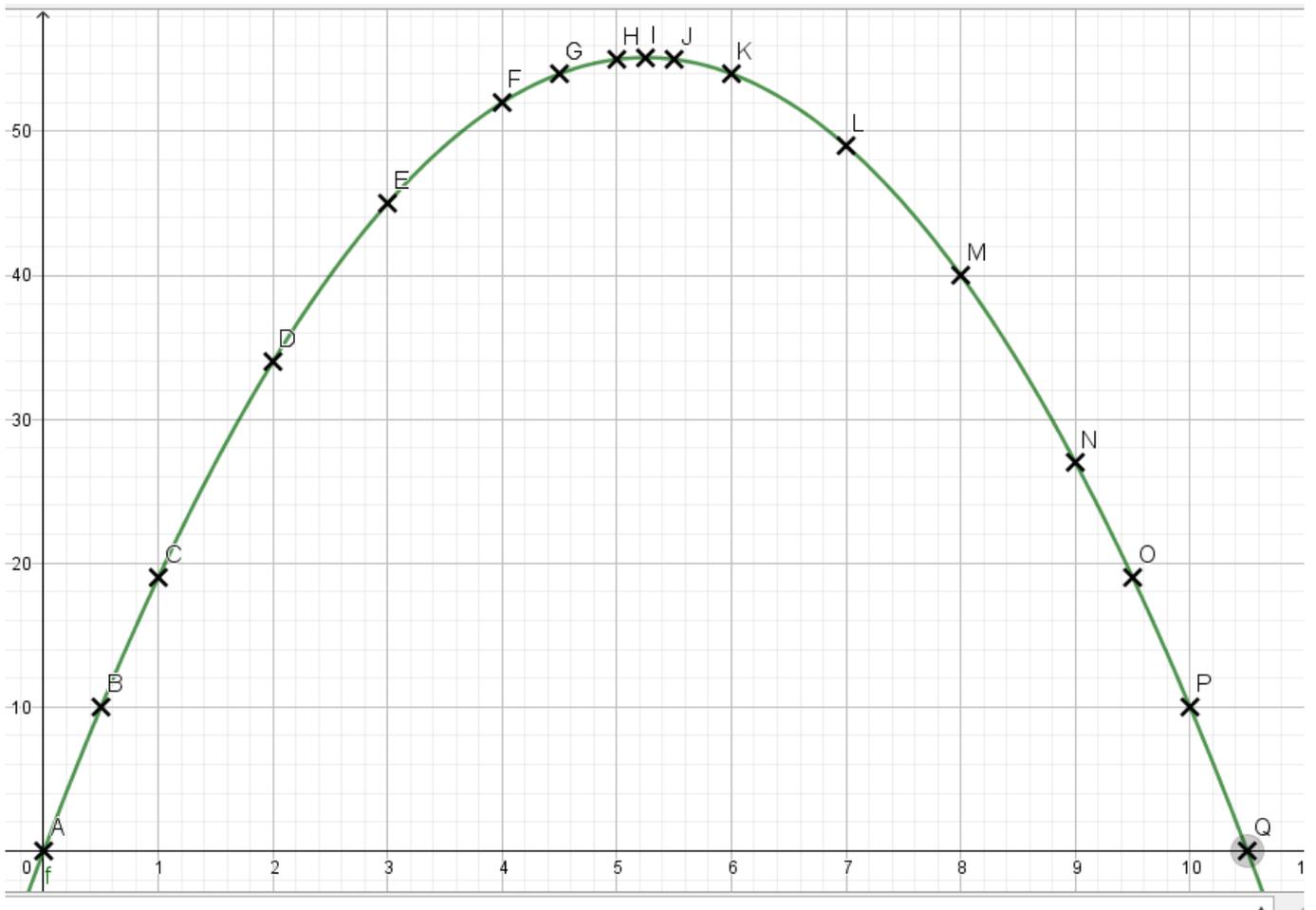
6. A l'aide du tableur de votre calculatrice, compléter le tableur de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	2	3	4	4,5	5	5,25	5,5	6	7	8	9	9,5	10	10,5
f(x)	0	10	19	34	45	52	54	55	55,1	55	54	49	40	27	19	10	0

7. Dans le repère suivant, placer tous les points de A à Q puis, tracer la courbe de cette fonction :

Sur l'axe des abscisses, nous placerons les valeurs de x et sur l'axe des ordonnées, nous placerons les valeurs de $f(x)$.

x	0	0,5	1	2	3	4	4,5	5	5,25	5,5	6	7	8	9	9,5	10	10,5
f(x)	0	10	19	34	45	52	54	55	55,1	55	54	49	40	27	19	10	0
Points	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q

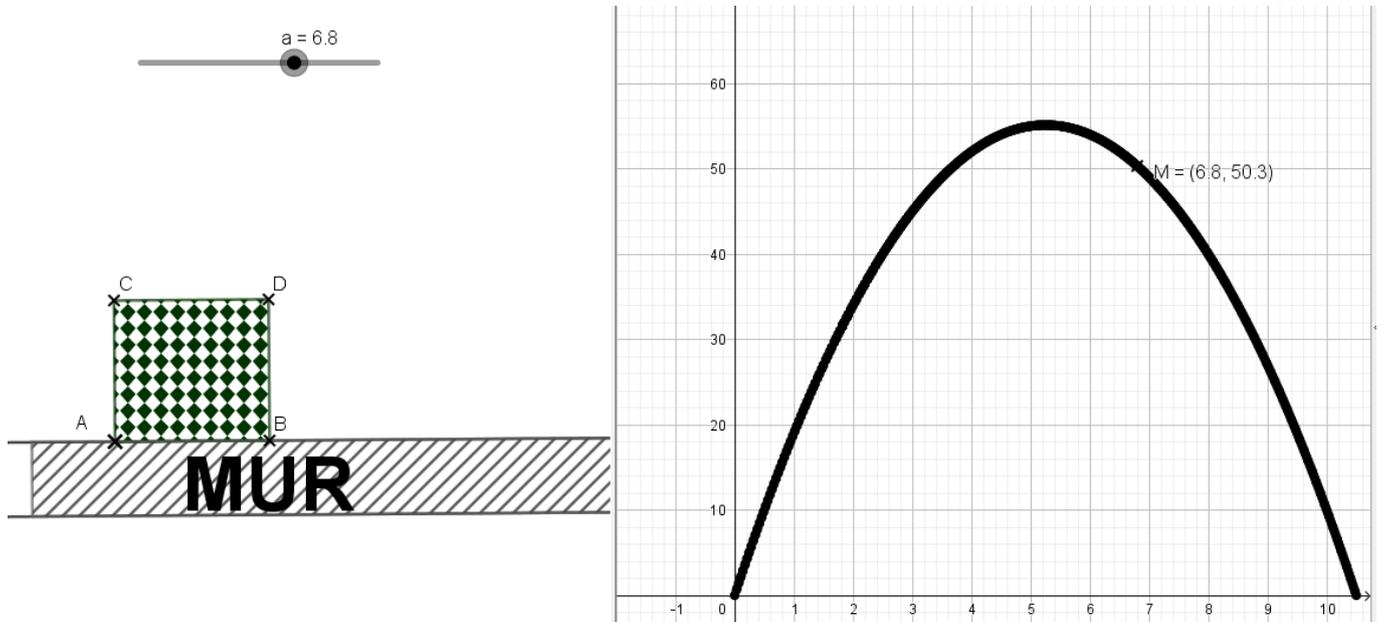


8. Retrouver graphiquement pour quelle valeur de x l'aire de l'enclos est maximale et calculer cette aire.

L'aire de l'enclos est maximale pour $x = 5,25$ m.

$$f(5,25) = -2 \times 5,25^2 + 21, \times 5,25 = -55,125 + 110,25 = 55,125 \text{ m}^2.$$

2. Résolution du problème avec Geogebra :



II. Généralités sur les fonctions :

1. Définitions et vocabulaire :

Définition :

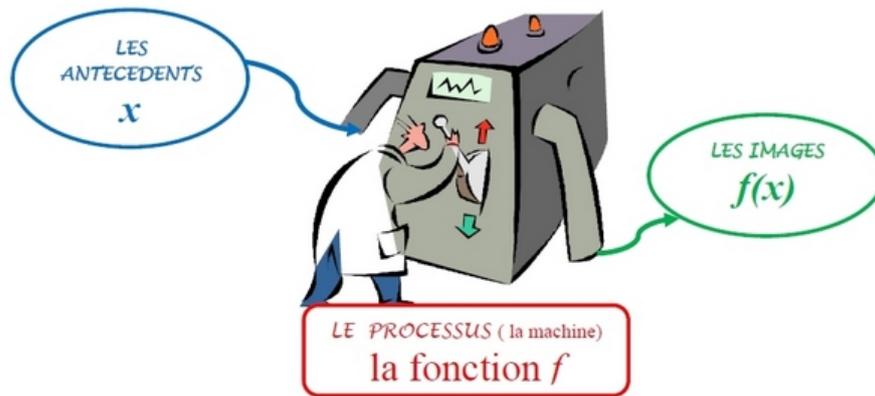
Une **fonction**, notée f , est un **processus mathématique** qui à tout nombre x d'un ensemble de départ associe un **unique** nombre, noté **$f(x)$** , dans un ensemble d'arrivée.

Le nombre x est appelé l'antécédent de $f(x)$.

Le nombre $f(x)$ est appelé l'image du nombre x par la fonction f .

Une fonction f peut être notée de deux façons :

- la fonction f telle que $f : x \mapsto f(x)$
- la fonction f définie par $f(x) = \dots$



Exemple de fonctions :

La fonction qui associe à un nombre son double est définie par $f : x \mapsto 2x$.

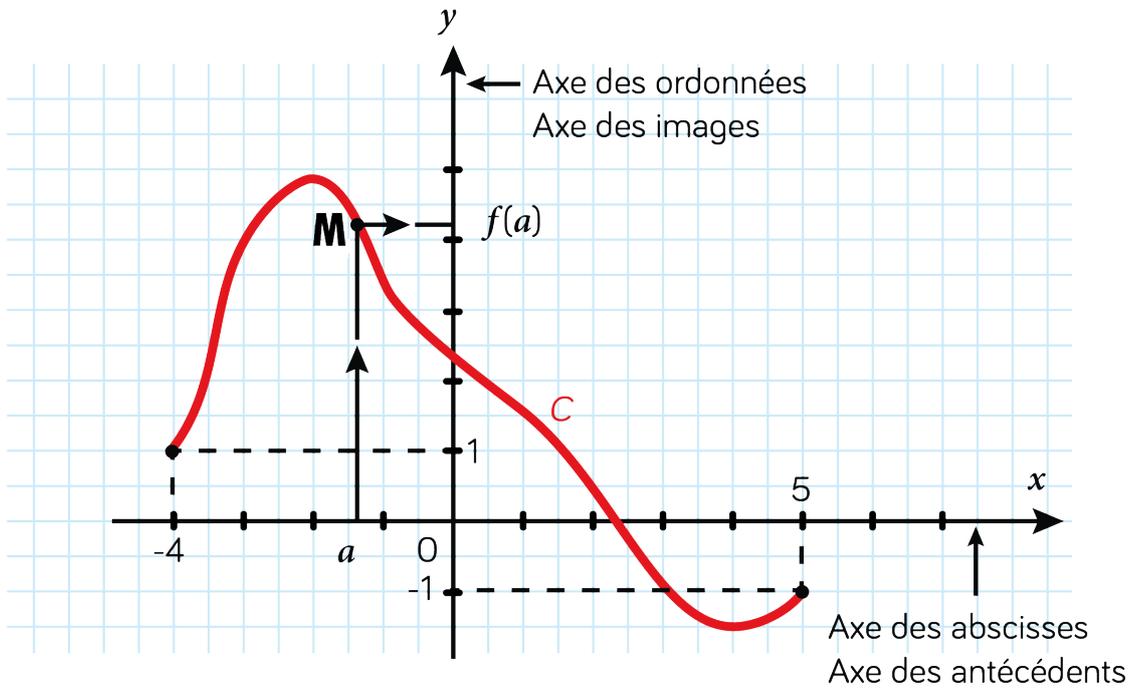
La fonction triple est la fonction h définie par $h(x) = 3x$.

la fonction k qui a une longueur x associe l'aire du carré est définie par $k(x) = x^2$

2.Courbe représentative d'une fonction :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble. On appelle **courbe représentative** d'une fonction f , notée C_f , l'**ensemble des points** de coordonnées **$M(a, f(a))$** dans un repère cartésien du plan.



III. Carte mentale sur les fonctions :

