Cours de maths en 3ème

Fonctions linéaires et affines

Les fonctions linéaires sont couramment utilisées pour modéliser les relations entre deux variables qui sont censées changer à un rythme constant, comme la distance parcourue en fonction du temps ou le coût d'un produit en fonction du nombre d'unités produites. Elles ont également des applications importantes dans des domaines tels que l'économie, la physique, l'ingénierie et les statistiques.

I. Les fonctions linéaires :

1.Définitions et vocabulaire :

Définition :

Soit a un nombre relatif.

- On appelle fonction linéaire, toute fonction dont l'expression est de la forme f(x)=ax.
- x est appelé l'antécédent du nombre f(x);
- f(x) est appelé l'image de x par la fonction f.

Remarque :

Lorsque a=0, nous avons f(x)=0. Cette fonction est appelée la **fonction nulle**.

Exemple :

Considérons la fonction f qui à un nombre x associe son triple.

Cette fonction f est définie par $f : x \mapsto 3x$.

C'est bien une fonction linéaire car elle est du type f(x)=ax avec a=3.

Compléter le tableau de valeurs suivants :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Points	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K

Est-ce un tableau de proportionnalité ?

$$\frac{3}{1}=3;\frac{6}{2}=3;\frac{9}{3}=3;....;\frac{30}{10}=3$$

Tous les rapports sont égaux donc c'est un tableau de proportionnalité et la valeur du coefficient de proportionnalité est a=3.
Propriété :

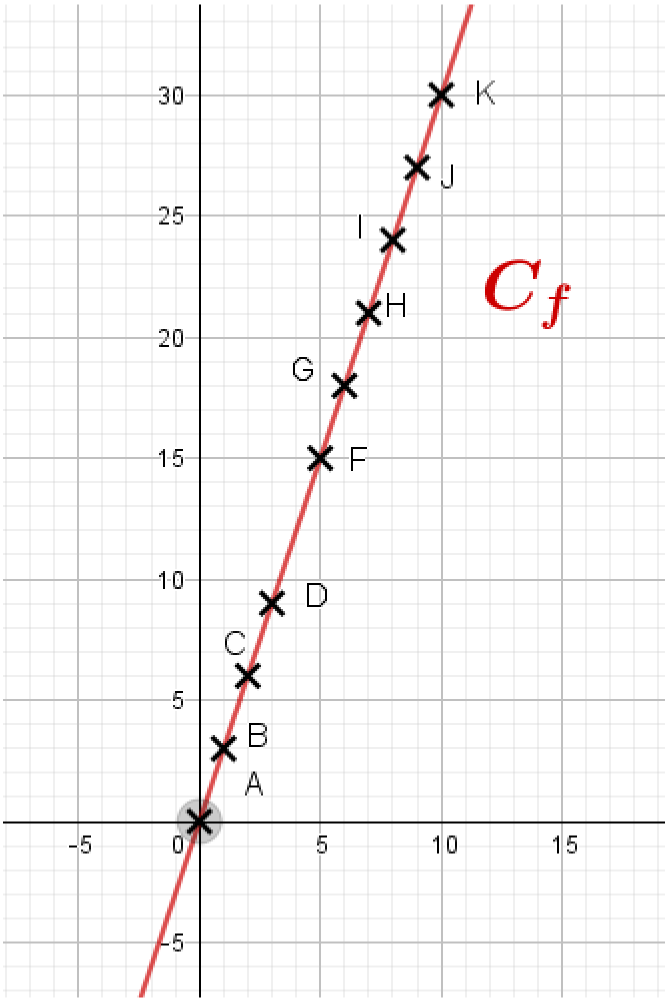
Soit f une fonction linéaire telle que f(x)=ax.Toute fonction linéaire provient d'une situation de **proportionnalité**.

2.Courbe représentative d'une fonction linéaire :

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent.

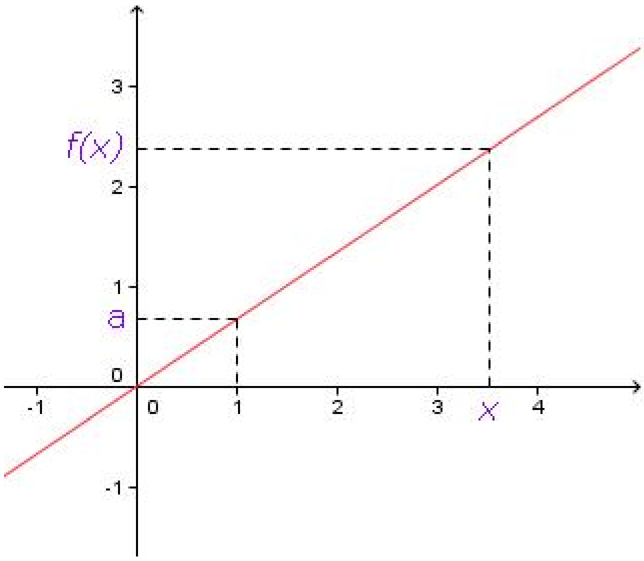
Dans un repère cartésien, placer les points A,B,....,K puis tracer la courbe de cette fonction.



Propriété :

Soit a un nombre relatif.Soit f une fonction linéaire définie par $f(x) = ax$.

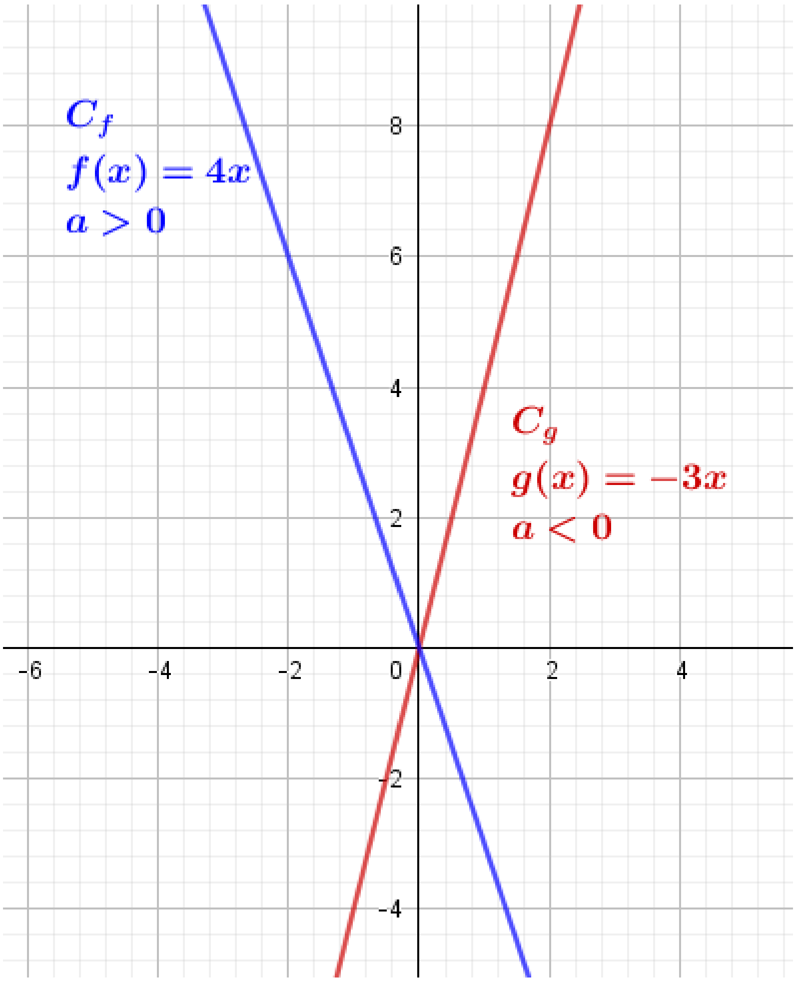
- La courbe de cette fonction f est une droite qui passe par l'origine.
- L'équation de cette droite (d) est $y = ax$.
- Le nombre a est appelé **coefficient directeur (ou pente)** de la droite.



Propriété :

Soit a un nombre relatif.Soit f une **fonction linéaire** définie par $f(x) = ax$.

- Si a>0, f est **croissante**;
- Si a<0, f est **décroissante**;
- Si a=0, f est constante, c'est la **fonction nulle**.



II.Les fonctions affines :

1.Définitions et vocabulaire :

Définition :

Soit a et b deux nombres relatifs.

- On appelle fonction affine, toute fonction dont l'expression est de la forme f(x)=ax+b.
- x est appelé l'antécédent du nombre f(x);
- f(x) est appelé l'image de x par la fonction f.

Remarque :

Lorsque a=0, nous avons f(x)=b. Cette fonction est appelée la **fonction constante**.

Lorsque b=0. La fonction affine devient une **fonction linéaire**.
Propriété :

Une **fonction linéaire est une fonction affine**.La réciproque est fausse.

Remarque :

Si f, définie par f(x)=ax, est une fonction linéaire alors l'expression de la fonction linéaire peut aussi s'écrire $f(x) = ax + 0\,(b = 0)$.

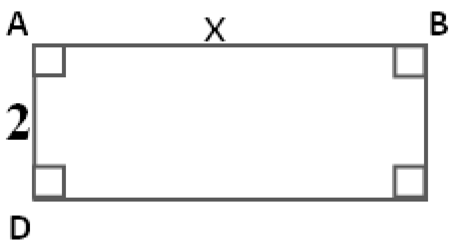
C'est donc une fonction affine.

Contre-exemple :

Par contre, la fonction f définie par $f(x) = 3x + 5$ est une fonction affine mais ce n'est pas une fonction linéaire.

Exemple :

Considérons la fonction P qui à un nombre x associe le périmètre du rectangle suivant :



Cette fonction P est définie par $P(x) = x + x + 2 + 2 = 2x + 4$.

C'est bien une fonction affine car elle est du type $P(x) = ax + b$ avec a=2 et b=4.

Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(x)	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Points	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K

Est-ce un tableau de proportionnalité ?

$\frac{6}{1}=6;\frac{8}{2}=4$

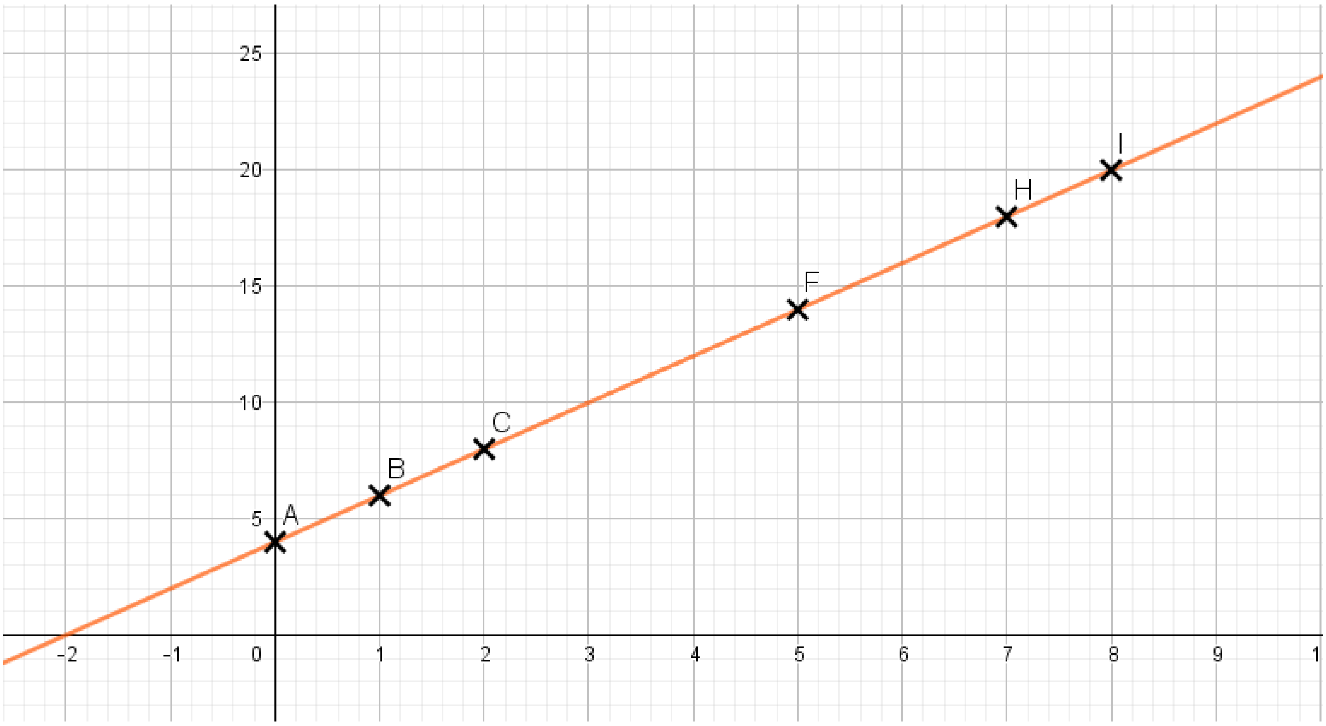
Tous les rapports ne sont pas égaux donc ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

2.Courbe représentative d'une fonction affine :

Exemple :

Reprenons l'exemple du périmètre du rectangle.

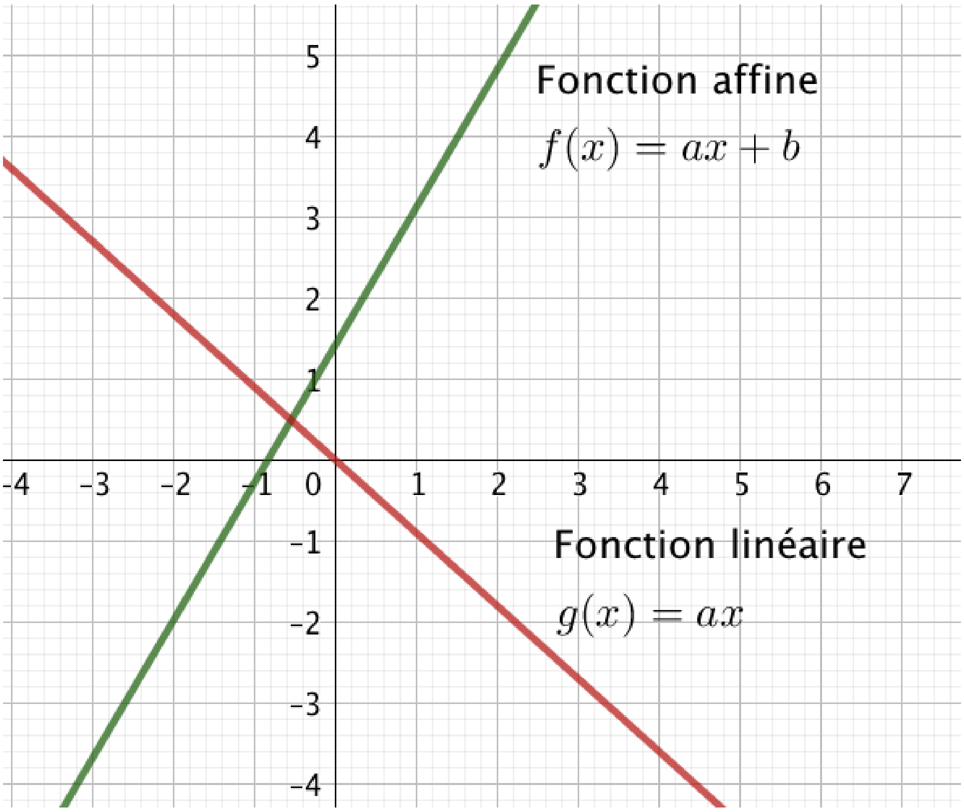
Dans un repère cartésien, placer les points A,B,....,K puis tracer la courbe de cette fonction affine.



Propriété :

Soient a et b deux nombres relatifs.Soit f une **fonction affine** définie par $f(x)=ax+b$.

- La courbe de cette fonction f est une **droite** .
- L'équation de cette droite (d) est $y=ax+b$.
- Le nombre a est appelé **coefficient directeur (ou pente)** de la droite.
- Le nombre b est appelé l'**ordonnée à l'origine**.

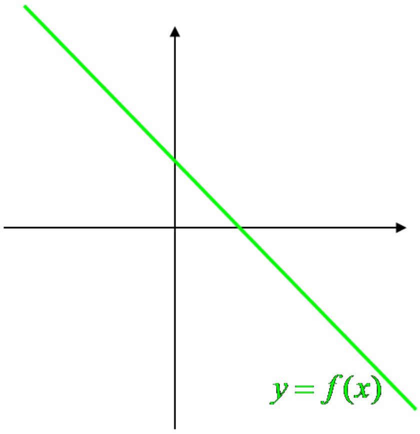


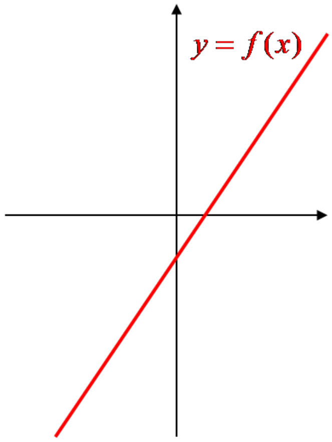
Propriété :

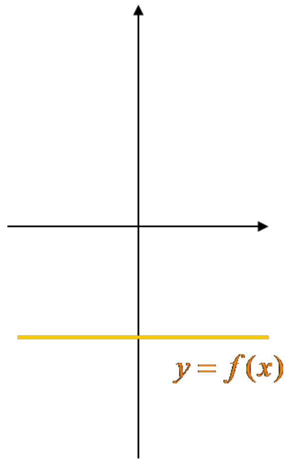
Soient a et b deux nombres relatifs.

Soit f une fonction linéaire définie par $f(x) = ax + b$.

- Si a>0, f est croissante;
- Si a<0, f est décroissante;
- Si a=0, f est constante.







$f(x) = ax + b$ avec $a < 0$

Fonction affine décroissante

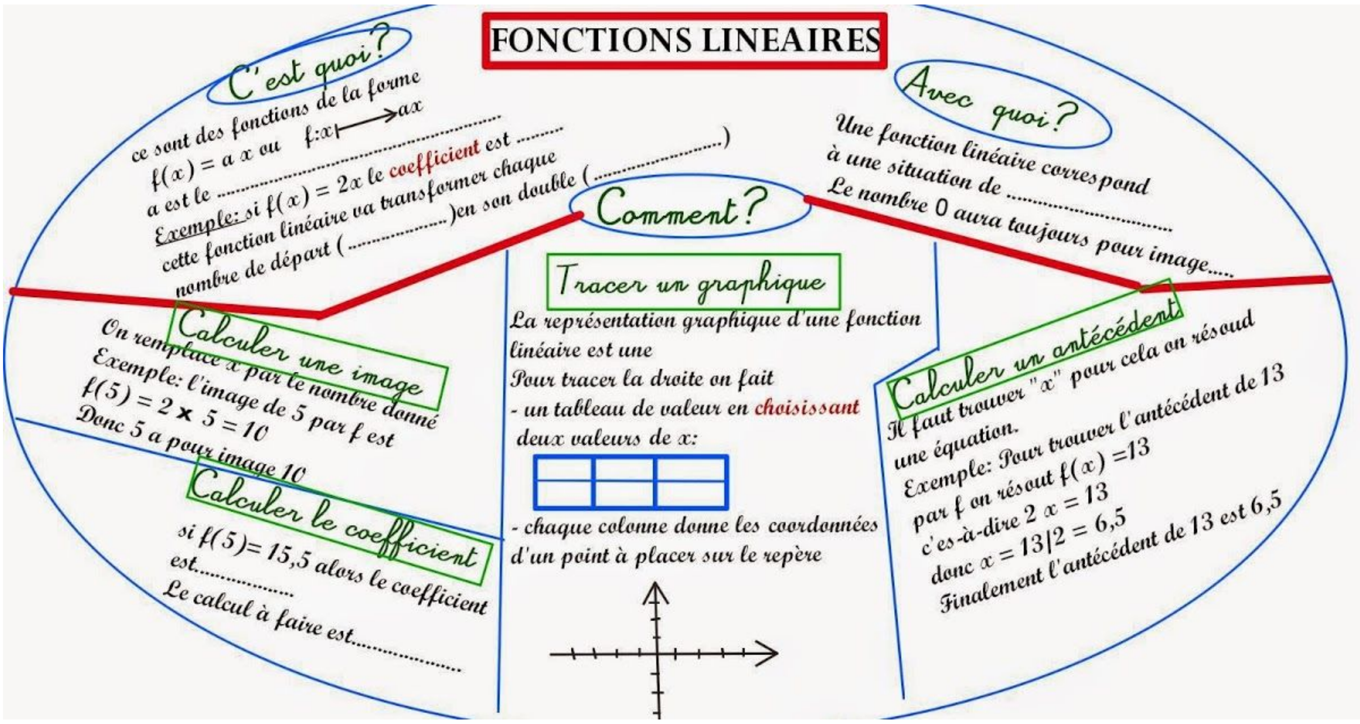
$f(x) = ax + b$ avec $a > 0$

Fonction affine croissante

$f(x) = ax + b$ avec $a = 0$

Fonction affine constante

III. Cartes mentales sur les fonctions linéaires et les fonctions affines :



Fonctions affines

QUOI ?

Fonction de la forme $x \mapsto ax + b$,

a est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine

Avec l'expression de f

Calcul d'image :
On remplace x par sa valeur dans l'expression de f

Calcul d'antécédent :
On cherche x pour que $f(x)$ soit égal au nombre donné

Avec deux images

On donne deux nombres x_1 et x_2 et leurs images $f(x_1)$ et $f(x_2)$

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

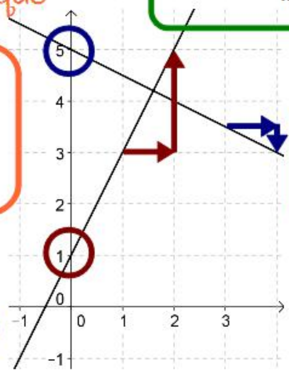
Pour retrouver l'expression de la fonction

Avec un graphique

La représentation de la fonction est **une droite**

$f(x) = 2x + 1$

$g(x) = -0{,}5x + 5$



L'ordonnée à l'origine est **l'image de 0**

Le coefficient directeur est **la variation en ordonnées :** quand **on avance de 1** en abscisses.