Intégrale

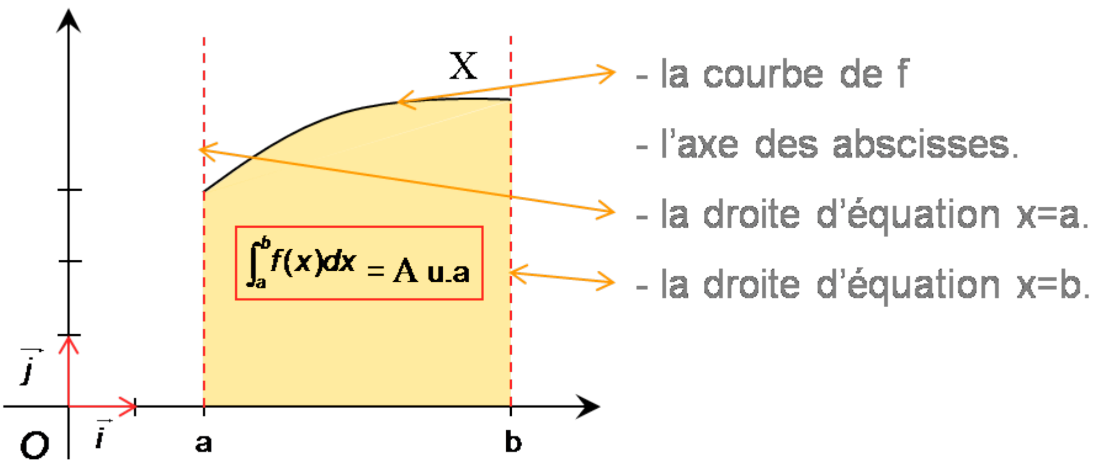
I.Intégrale d'une fonction

Définition :

On considère une fonction f continue et positive sur un intervalle [a;b] et sa courbe C_f dans un repère orthonormé du plan.L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses et les droites d'équation x=a et x=b.

Cette aire se note $\int_a^b f(x)dx$ et se lit intégrale de a à b de la fonction f.

Les nombres a et b s'appellent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de l'intégrale.



Théorème :

On considère f une fonction continue et positive sur un intervalle [a,b].La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est définie et dérivable sur [a,b] et on a $F' = f$.

II. Primitive d'une fonction continue

Définition :

On considère f une fonction continue sur un intervalle I.Une primitive de f est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème : lien entre primitives.

On considère f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.La fonction f admet une une infinité de primitives sur I qui sont de la forme $x \mapsto F(x) + k (k \in \mathbb{R})$.

Théorème : condition d'unicité de la primitive.

Soient $x_0 \in, I$ et y_0 deux nombres réels donnés.Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur un intervalle I, il en existe une seule qui vérifie $F(x_0) = y_0$.

Propriété : calcul d'une intégrale.

On considère une fonction f continue sur un intervalle [a;b] et F une primitive de f sur [a;b].Nous avons $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Exemple :

Calculer la valeur de l'intégrale suivante :

$\int_0^3 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}] = (\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}) = 9.$

Propriété : primitives des fonctions usuelles.

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Propriété : linéarité de l'intégrale.

On considère f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a,b] et k un nombre réel. $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

$\int_a^b (kf)(t)dt = k \int_a^b f(t)dt$

Propriété : intégrale d'une fonction négative.

On considère f une fonction continue et négative sur un intervalle [a,b].L'aire du domaine situé entre C_f et les droites d'équation x=a et x=b et l'axe des abscisses vaut $-\int_a^b f(x)dx$.

Propriété : relation de Chasles de l'intégrale.

On considère f une fonction continue et négative sur un intervalle I et a,b,c trois nombres réels appartenant à I.$\int_a^b f\,(t)dt = \int_a^c f\,(t)dt + \int_c^b g\,(t)dt$

Propriété : intégrale et inégalité.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a,b].Si f est positive sur [a,b] alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

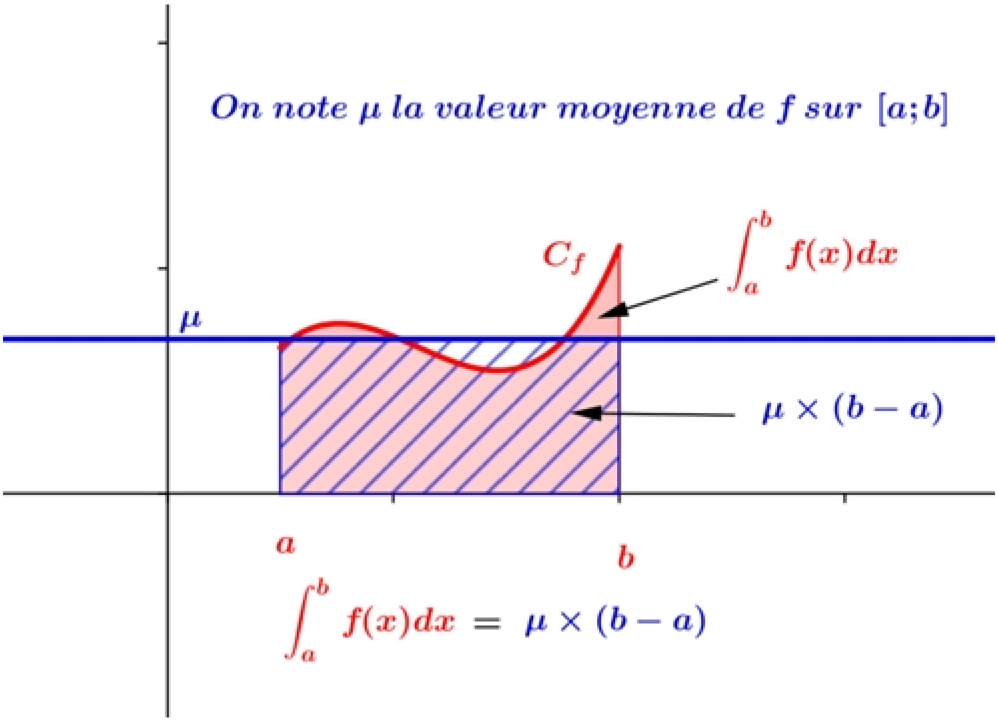
Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Définition : valeur moyenne d'une fonction.

On considère f une fonction continue sur un intervalle [a,b].

La valeur moyenne de f sur [a,b] est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$



III.Carte mentale sur les intégrales