

Intégrales et calcul d'aires

Ce qu'évalue le contrôle : intégrales et calcul d'aires

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **2 heures**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Calcul intégral (4 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Calculer l'aire du domaine compris entre deux courbes après avoir étudié leur position relative
- Encadrer une intégrale par la méthode des rectangles et compléter un algorithme Python
- Étudier une suite d'intégrales : premiers termes, monotonie, encadrement et limite
- Calculer une intégrale par parties et en déduire la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
- Interpréter une valeur moyenne et une intégrale dans une situation concrète avec les unités

Avant de commencer

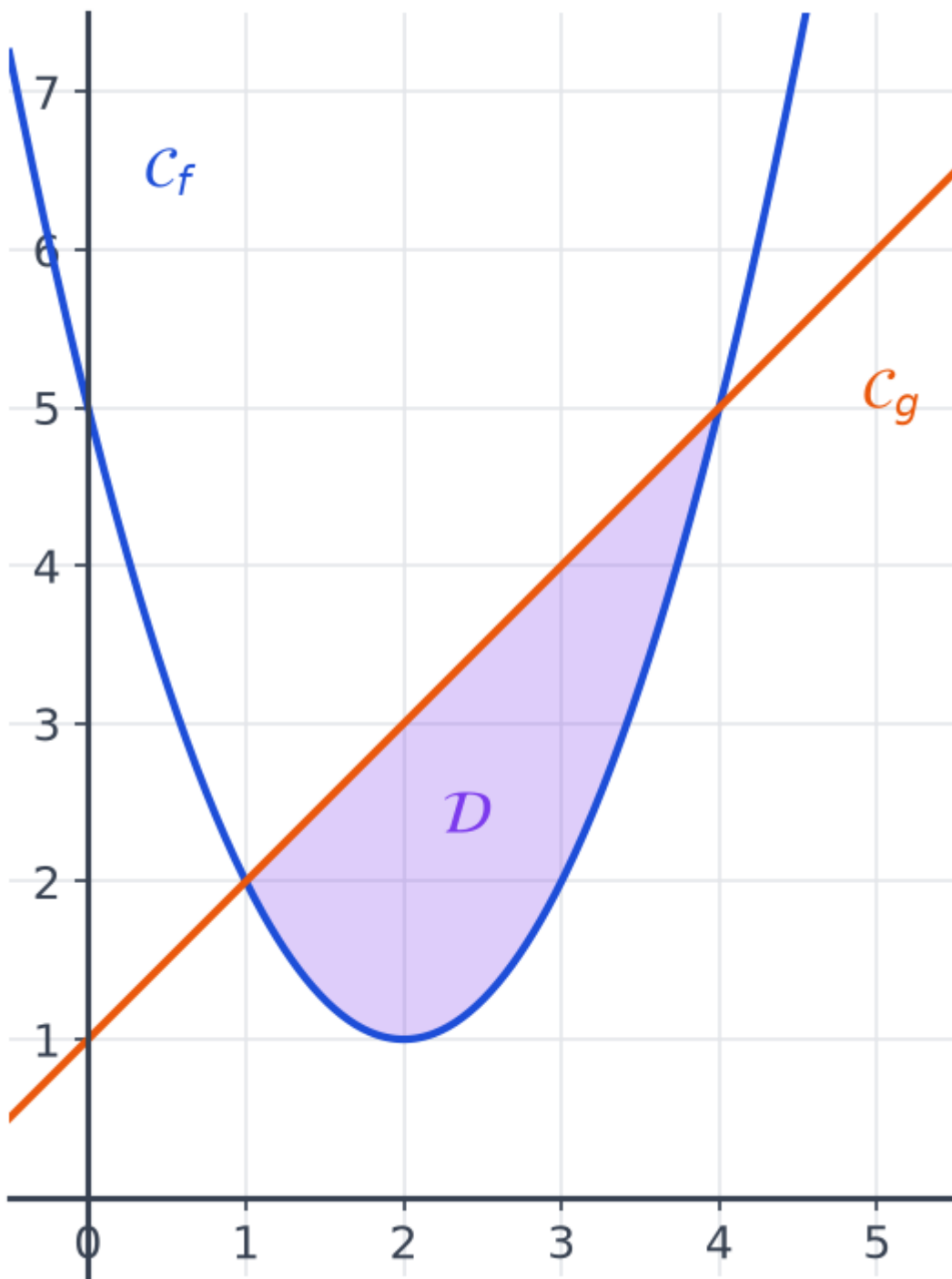
Avant tout calcul d'aire, étudie la **position relative** des deux courbes : on intègre toujours la fonction du dessus moins celle du dessous. Dans la suite d'intégrales, pense à la **positivité** de

l'intégrale quand les bornes sont dans le bon ordre. Pour l'intégration par parties, écris clairement u , u' , v et v' avant de te lancer. Enfin, garde des valeurs exactes jusqu'au bout, puis arrondis seulement la réponse finale avec son **unité**.

Le sujet du contrôle : intégrales et calcul d'aires

Exercice 1 - Le domaine entre une parabole et une droite (5 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = x + 1$.
Leurs courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont tracées dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm, et le domaine $\mathcal{D}$ qu'elles délimitent est coloré.



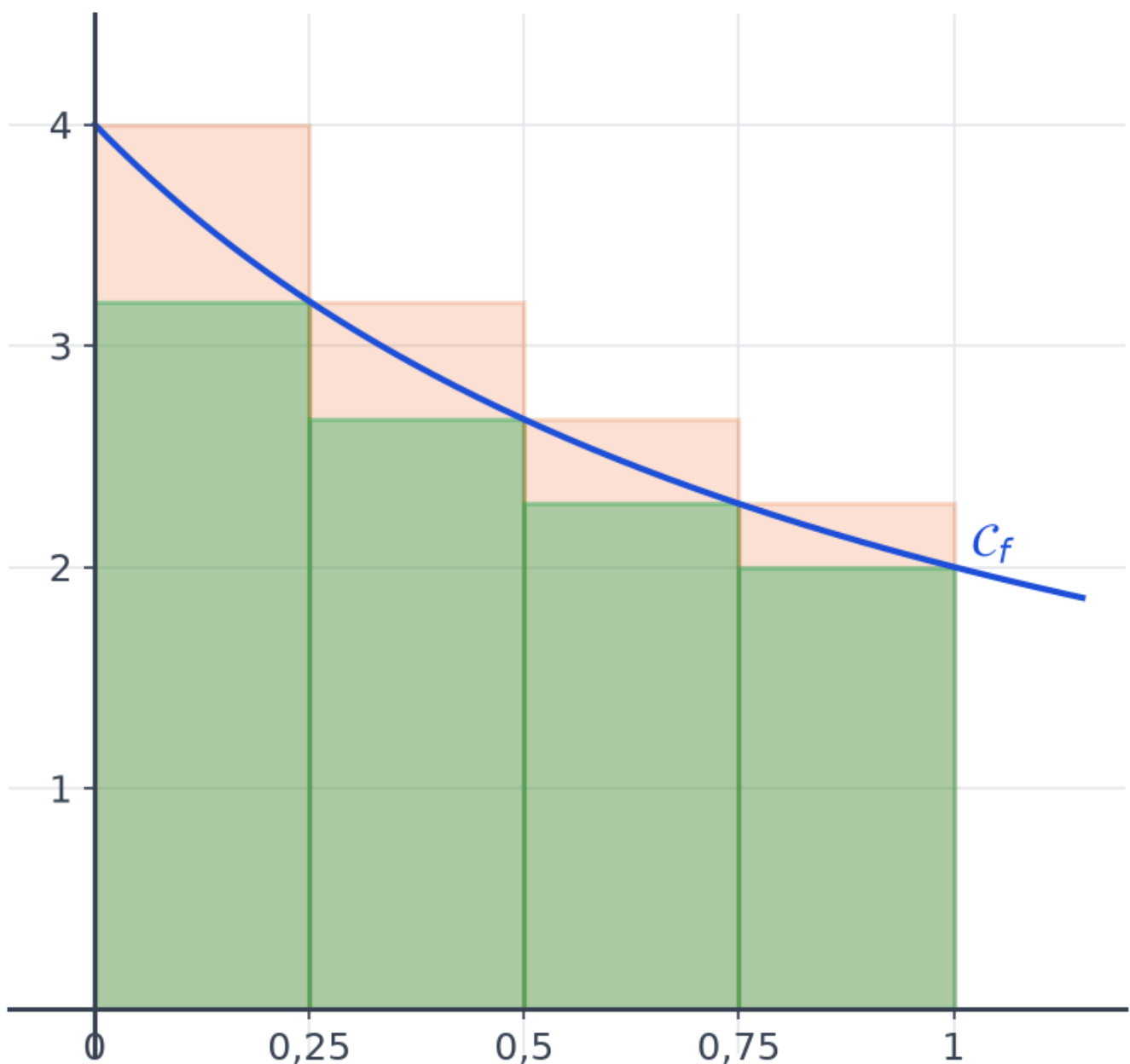
La figure n'est pas à l'échelle.

1. Détermine par le calcul les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g . (1,5 point)
2. Montre ensuite que $g(x) - f(x) = -(x-1)(x-4)$, puis déduis-en la position relative des deux courbes sur $[1;4]$. (1 point)
3. Calcule l'aire du domaine D en unités d'aire. (2 points)

4. Donne enfin cette aire en cm^2 . (0,5 point)

Exercice 2 - Rectangles et programme Python (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \frac{4}{1+x}$, et $I = \int_0^1 f(x) dx$. On partage $[0;1]$ en quatre intervalles de même longueur 0,25. Sur la figure, les rectangles verts sont sous la courbe, alors que les rectangles orange la dépassent.



Pour généraliser, on écrit aussi la fonction Python suivante, qui doit renvoyer la somme des

aires des n rectangles situés sous la courbe.

```
1  def somme_inf(n):
2      h = 1 / n
3      s = 0
4      for k in range(1, n + 1):
5          s = s + .....
6      return .....
```

1. Justifie que f est décroissante sur $[0;1]$, puis explique pourquoi les rectangles verts ont pour hauteur la valeur de f à droite de chaque intervalle. (0,5 point)
2. Calcule la somme s_4 des aires des rectangles verts et la somme S_4 des aires des rectangles orange, arrondies au millièm. Déduis-en un encadrement de I . (1,5 point)
3. Recopie la fonction Python et complète ses lignes 5 et 6. (1 point)
4. Calcule enfin la valeur exacte de I , puis vérifie qu'elle appartient bien à l'encadrement obtenu. (1 point)

Exercice 3 - Une suite d'intégrales (5 points)

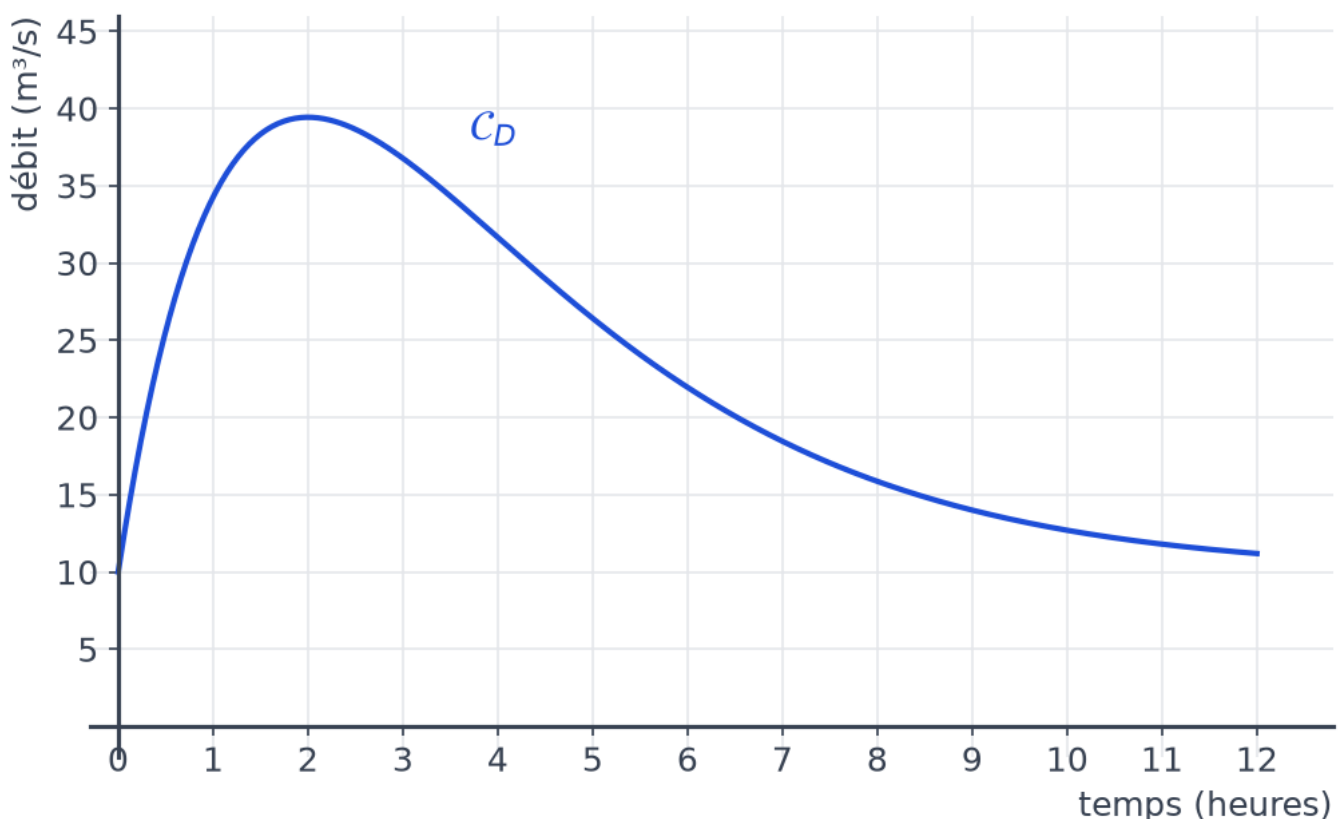
Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calcule d'abord la valeur exacte de I_0 . (1 point)
2. Calcule $I_0 + I_1$, puis déduis-en la valeur exacte de I_1 . (1 point)

3. Montre que, pour tout entier naturel n , $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx$, puis étudie le sens de variation de la suite (I_n) . (1 point)
4. Démonstre que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2}(n+1) \leq I_n \leq \frac{1}{3}n+1$. (1,5 point)
5. Quelle est la limite de la suite (I_n) ? Justifie. (0,5 point)

Exercice 4 - La crue de la rivière (6 points)

Après un violent orage, le débit d'une rivière, en m^3 par seconde, est modélisé pendant les douze heures suivantes par la fonction D définie sur $[0;12]$ par $D(t) = 10 + 40te^{-0,5t}$, où t est le temps écoulé en heures.



1. Calcule $D'(t)$, puis étudie les variations de D sur $[0;12]$. Quand le débit est-il maximal ? Donne ce maximum arrondi au dixième. (1,5 point)

2. À l'aide d'une intégration par parties, montre que $J = \int_0^{12} t e^{-0,5t} dt = 4 - 28e^{-6}$. (2 points)
3. Déduis-en la valeur exacte du débit moyen μ de la rivière sur ces douze heures, puis donne-la arrondie au dixième. (1,5 point)
4. Estime enfin le volume d'eau écoulé pendant ces douze heures, arrondi au millier de m^3 . (1 point)



Réviser intégrales et calcul d'aires avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon intégrale ; entraîne-toi sur la fiche les intégrales avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Calcul d'intégrales : contrôle de maths en terminale
- Primitives et calcul intégral : contrôle de maths en terminale
- Équations différentielles : contrôle de maths en terminale