L'étude graphique et algébrique des fonctions

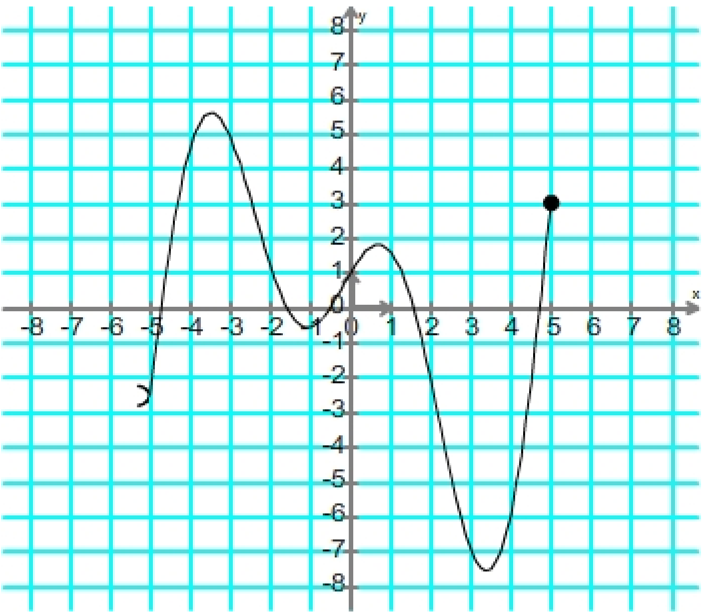
Elles sont utilisées dans de nombreuses applications du monde réel, comme la modélisation de la croissance démographique, la prédiction de la trajectoire d'un projectile et l'optimisation des processus de fabrication. La compréhension des fonctions est essentielle pour appliquer les principes mathématiques aux problèmes du monde réel.

I. Représenter graphiquement une fonction

Définition :

Dans un repère orthonormé du plan, une fonction f définie sur un ensemble D_f est représentée graphiquement par l'ensemble des points $M(x;y)$ avec $y=f(x)$.

Cet ensemble de points est appelée la courbe représentative de la fonction f et l'ensemble D_f est l'ensemble (ou domaine) de définition de la fonction f.



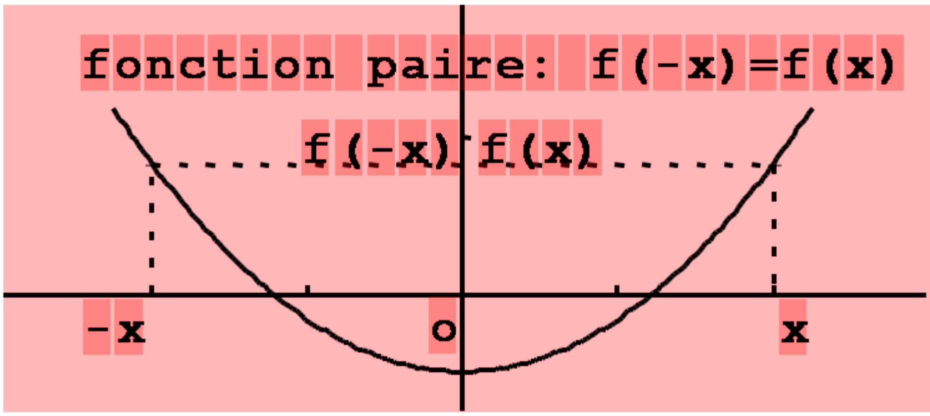
Exemple :

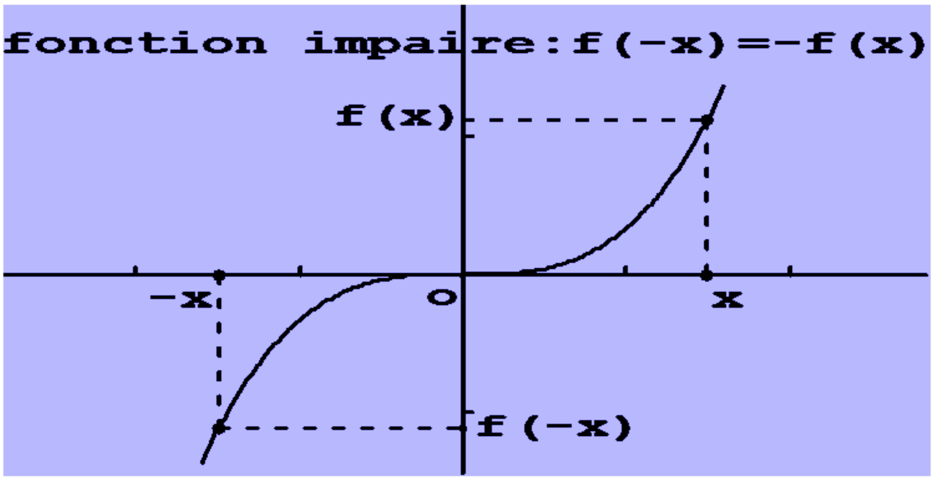
Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Une fraction est définie lorsque son dénominateur est non nul, par conséquent, $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.
Définition :

Soit f définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à 0.Si pour tout $x \in, D_f$, f(x)=f(-x) alors la fonction est **paire** et sa courbe représentative dans un repère orthonormé est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Si pour tout $x \in D_f$, f(-x)=-f(x) alors la fonction est im**paire** et sa courbe représentative dans un repère orthonormé est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.





Exemple :

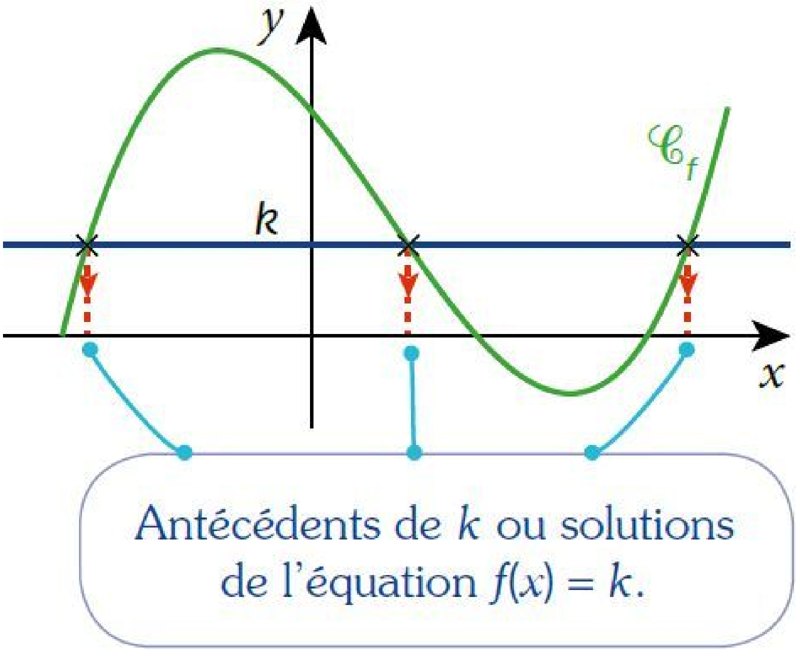
La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est paire car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

La fonction f définie par $f(x)=x^3$ est impaire car $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

II. Résoudre graphiquement une équation

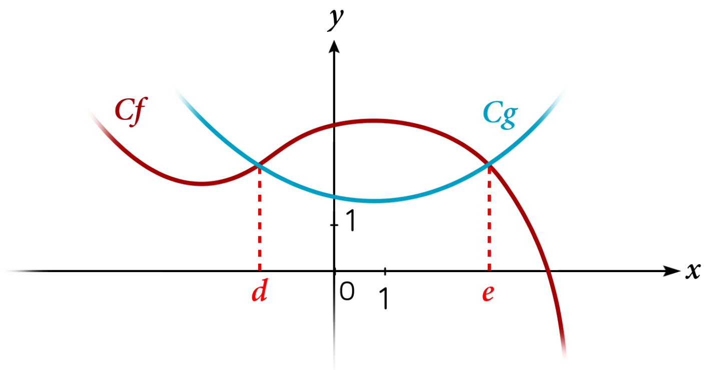
Définition :

> Résoudre graphiquement l'équation f(x)=k revient à déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes y=f(x) et y=k.



Définition :

> Résoudre graphiquement l'équation f(x)=g(x) revient à déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g.



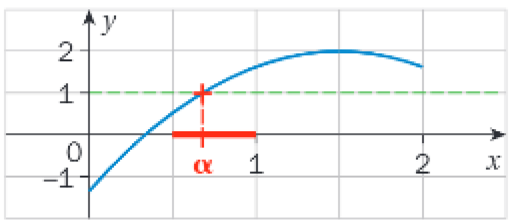
Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f . **Encadrer la racine** α de l'**équation f(x)=k** revient à déterminer un intervalle [a ; b] où a et b sont deux nombres réels appartenant à D_f, tel que $\alpha \in [a;b]$.

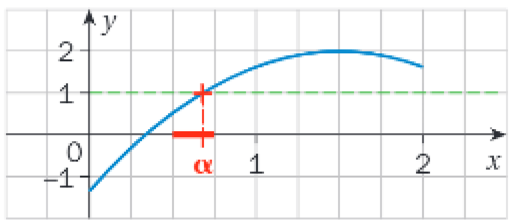
C'est à dire que $a \leq \alpha \leq b$.

La précision de l'**encadrement** correspond à l'**amplitude** de l'intervalle [a ; b] et elle est de b-a.

Dans les deux graphiques ci-dessous, la même fonction f définie sur [0 ; 2] est représentée. On admet que l'équation $f(x)$ = 1 admet une unique solution α sur [0 ; 2].



La précision du repère ci-dessus permet de donner un encadrement d'amplitude 0,5 : $\alpha \in$ [0,5 ; 1].



La précision du repère ci-dessus permet de donner un encadrement d'amplitude 0,25 : $\alpha \in$ [0,5 ; 0,75].

III. Résoudre graphiquement une inéquation

Définition :

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq k$ revient à déterminer les abscisses des points de la courbe C_f ayant une ordonnée supérieure ou égale à k.

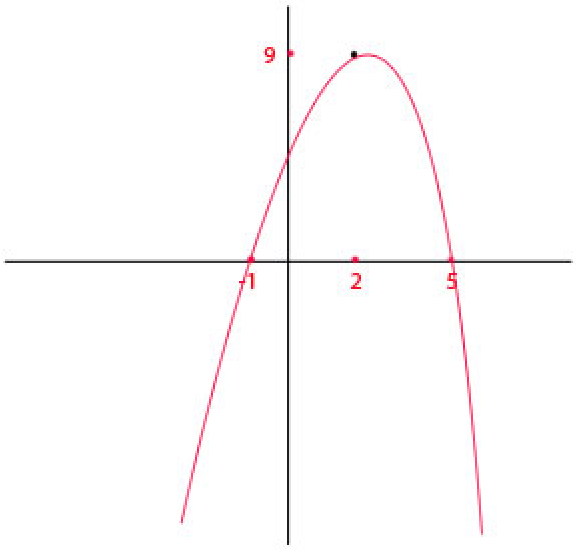
Définition :

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ revient à déterminer les abscisses
des points de C_f dont **les ordonnées sont inférieures** à celles de C_g.

Définition :

Dresser le tableau de signe d'une fonction f définie sur un ensemble D_f revient à étudier la position de sa courbe C_f par rapport à l'axe des abscisses dans un repère orthonormé du plan.

- Si C_f coupe l'axe des abscisses alors la fonction **f s'annule**;
- Si C_f est strictement au-dessus de l'axe des abscisses alors la fonction **f est strictement positive**;
- Si C_f est strictement en-dessous de l'axe des abscisses alors **f est strictement négative.**



x	-&		2		+&
F(x)		↗	9	↘	

x	-&	-1		5	+&
x + 1	−	0	+		−
5 - x	−		+	0	−
(x+1) * (5-x)	+	0	+	0	+