Les équations du second degré

I. Fonction polynôme du second degré

1.Généralités

Définition :

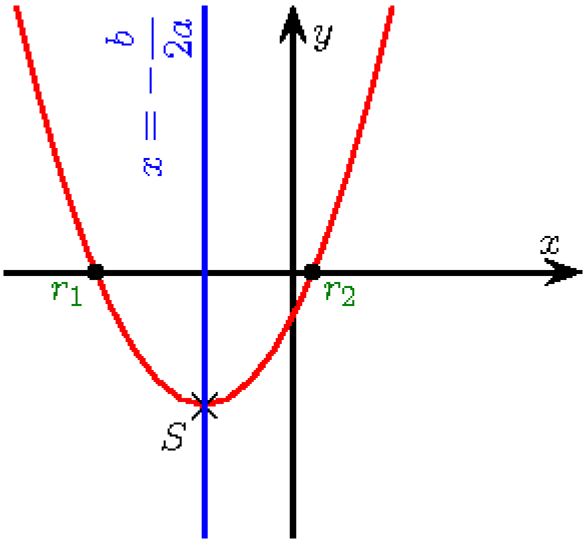
Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a,b,c trois nombres réels tel que a soit non nul est appelée **fonction polynôme du second degré** ou, simplement, **trinôme**.

2.Forme canonique

Théorème :

Tout fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a,b,c trois nombres réels tel que a soit non nul peut s'écrire de **façon unique** sous la forme $f(x) = a(x-, \alpha,)^2 + \beta$.Cette forme est appelée la **forme canonique** du trinôme.

La courbe représentative de f est appelée la **parabole et son équation est** $y = ax^2 + bx + c$.



Exemple :

Déterminer la forme canonique de la fonction suivante :

$f(x) = 2x^2 - 4x + 8$
$f(x) = 2(x^2 - 2x + 4)$
$f(x) = 2[(x-1)^2 - 1 + 4]$
$f(x) = 2[(x-1)^2 + 3]$
$f(x) = 2(x-1)^2 + 6$

Propriété :

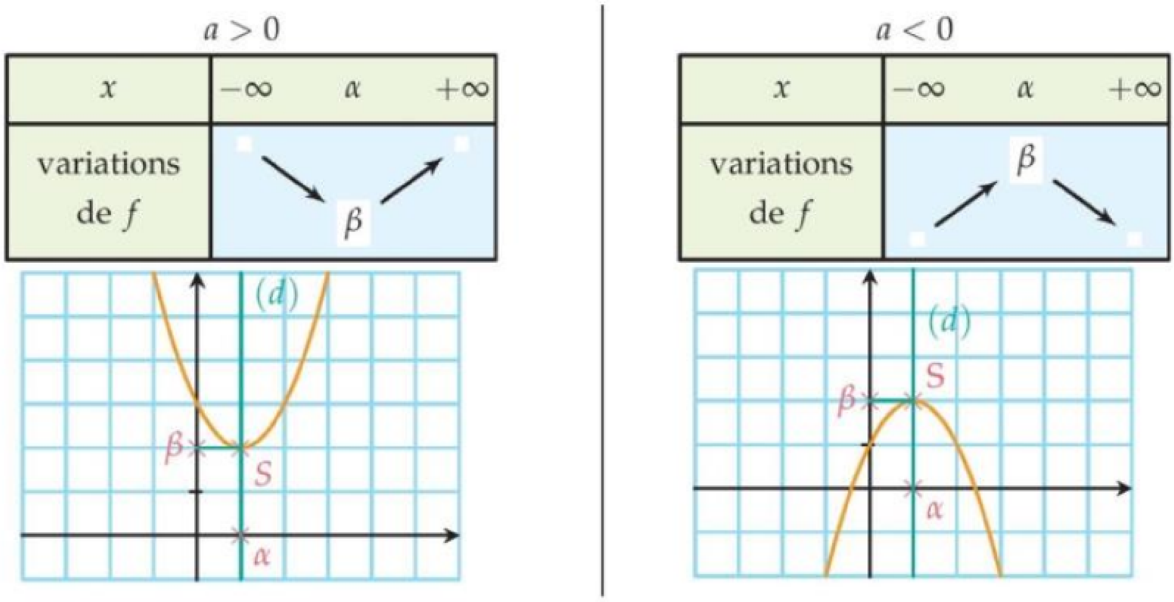
Une parabole de sommet $S(\alpha, \beta)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x =, \alpha$.

3.Sens de variation d'une fonction

Propriété :

Soit f une fonction du second degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

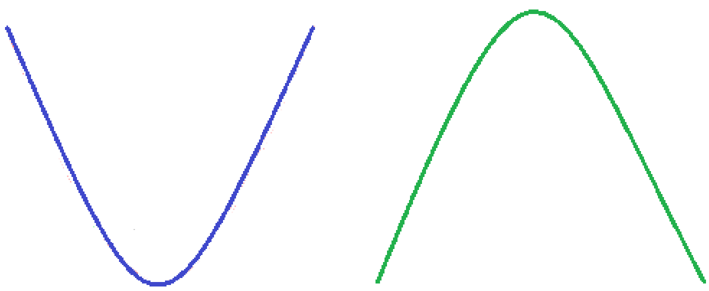
Le sens de variation de f dépend du signe du nombre a.



Vocabulaire :

- Si a>0, f admet un **minimum** en x=a égal à b que l'on peut traduire par "le sommet de la parabole est en bas" ou par "**f est convexe**".

- Si a<0, f admet un **maximum** en x=a égal à b que l'on peut traduire par "le sommet de la parabole est en haut" ou par "**f est concave**".



Parabole tournée vers le haut — Parabole tournée vers le bas

II.les équation du second degré et trinôme

1.Résolution d'équations du second degré

Définition : équation du second degré.

Une **équation du second degré** est une équation du type $ax^2+bx+c=0$ avec a,b,c trois nombres réels tel que a soit non nul.

Définition : discriminant.

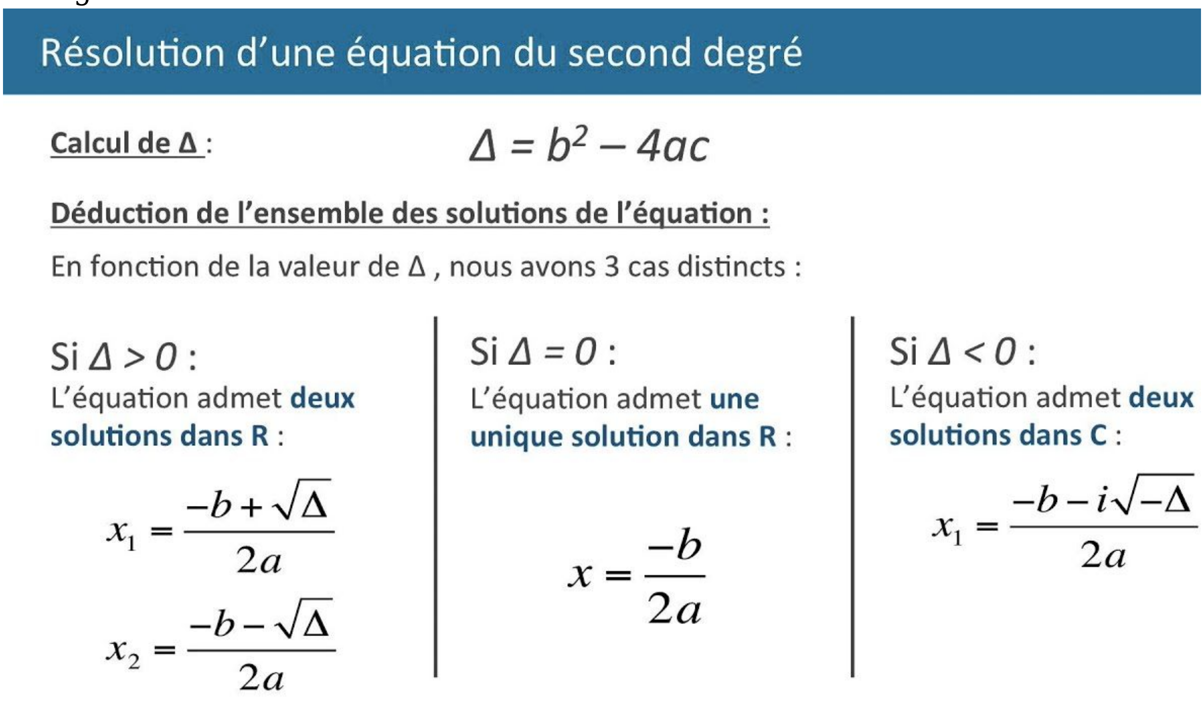
$\Delta, = b^2 - 4ac$ est le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

Vocabulaire :

On appelle **racine** du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Les solutions de l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées **racines ou zéros** de la fonction f.
Théorème :

Le nombre de solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ.



2.Le signe du trinôme

<table>
<tr><th></th><th>Solutions de l'équation
$ax^2 + bx + c = 0$</th><th>Signe de
$P(x) = ax^2 + bx + c$</th><th>Factorisation de
$P(x) = ax^2 + bx + c$</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>Deux solutions distinctes
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$x_1$</td><td></td><td>$x_2$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de $-a$</td><td>0</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td><td>$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>Une solution double
$x_3 = -\dfrac{b}{2a}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td><td>$P(x) = a(x - x_3)^2$</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>Pas de solution</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td></td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td><td>Pas de factorisation possible</td></tr>
</table>