Les équations et inéquations

Avant d'aborder cette leçon, il faut avoir acquis le contenu du cours sur les équations de l'année précédente.

I.Les équations du premier degré à une inconnue :

Définitions :

Soient a,b et c trois nombres relatifs tel que $a \neq 0$.

- On appelle **équation du premier degré à une inconnue** toute égalité qui peut se ramener à cette forme : $ax + b = c$.
- La lettre x est appelée **inconnue de l'équation**.
- **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient l'égalité.
- Toute valeur de x qui vérifie l'égalité est appelé **solution de l'équation**.
- L'expression ax+b est appelée **premier membre de l'équation**.
- L'expression c est appelée **second membre de l'équation**.

Propriété :

Soient a et b deux nombres relatifs. La solution de l'équation $x + a = b$ est $x = b - a$.

Propriété :

Soient a et b deux nombres relatifs tel que $a \neq 0$.La solution de l'équation $ax = b$ est $x = \frac{b}{a}$.

Exemple :

Résoudre l'équation suivante :

$$2x - 3 = 7x + 2$$
$$2x - 7x = 2 + 3$$
$$-5x = 5$$
$$x = \frac{5}{-5}$$
$$x = -1$$

II. Les inéquations du premier degré à une inconnue :

Définitions :

Soient a, b et c trois nombres relatifs tel que $a \neq 0$.

- On appelle **inéquation du premier degré à une inconnue** toute **inégalité** qui peut se ramener à cette forme : $ax + b \leq c$.
- La lettre x est appelée **inconnue de l'inéquation**.
- **Résoudre une inéquation**, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité.
- Toute valeur de x qui vérifie l'inégalité est appelé **solution de l'inéquation**.
- L'expression ax+b est appelée **premier membre de l'inéquation**.
- L'expression c est appelée **second membre de l'inéquation**.

Propriété :

Soient a et b deux nombres relatifs. Les solutions de l'inéquation $x+a \ \leq \ b$ sont $x \leq \ b-a$.

Propriété :

Soient a et b deux nombres relatifs tel que $a \neq \ 0$.Les solutions de l'inéquation $ax \ \leq \ b$ sont :

- $x, \leq, \frac{b}{a}$ si $a > 0$.
- $x, \geq, \frac{b}{a}$ si $a < 0$.

Exemples :

Résoudre les inéquation suivantes :

$$2x-3 \ \leq \ 7x+2$$
$$2x-7x \leq 2+3$$
$$-5x \leq 5$$
$$x \ \geq \ \frac{5}{-5}$$
$$x \geq -1$$

$$5x+6 \leq \ 2x+10$$
$$5x-2x \leq \ 10-6$$
$$3x \leq \ 10-6$$
$$3x \leq \ 4$$
$$x \leq \ \frac{4}{3}$$

III. Les équations-produits :

Propriété :

Un produit de facteurs est nul si et seulement si, un des facteurs, au moins, est nul.

$A \times \ \ B=0$ équivaut à $A=0$ ou $B=0$.

Exemple :

Résoudre l'équation-produit suivante :

$(2x-3)(5x+1)=0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si, un des facteurs, au moins, est nul.

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} 2x-3&=0 \\ 2x&=3 \\ x&=\frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} 5x+1&=0 \\ 5x&=-1 \\ x&=-\frac{1}{5} \end{aligned}$$

IV.Les équations du type $x^2=a$:

Propriété :

Les solutions de $x^2=a$ sont :

- $x=\sqrt{a}$ et $x=-\sqrt{a}$ si $a>0$
- 0 si a = 0;
- ensemble vide si $a<0$

Exemples :

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2=36$

36>0 donc il y a deux solutions qui sont :

$x=\sqrt{36}=6$ et $x=-\sqrt{36}=-6$

L'ensemble solution est $S=\ \{-6;6\ \}$.

b. $x^2=-15$

-15<0 donc il y a aucune solution, ou encore, le carré d'un nombre est toujours positif ou nul.

L'ensemble solution est $S = \varnothing$.

V.Carte mentale sur les équations et inéquations :