

# Les équations et les inéquations du second degré

## I. Fonction polynôme du second degré

### 1. Généralités

#### Définition :

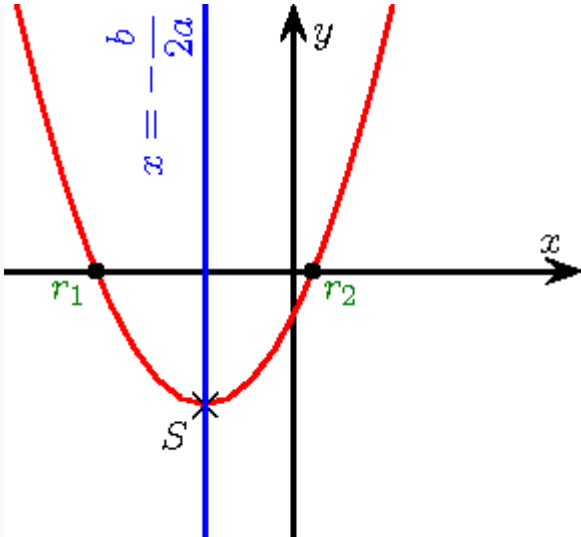
Toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a, b, c$  trois nombres réels tel que  $a$  soit non nul est appelée **fonction polynôme du second degré** ou, simplement, **trinôme**.

### 2. Forme canonique

#### Théorème :

Tout fonction  $f$  du second degré définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a, b, c$  trois nombres réels tel que  $a$  soit non nul peut s'écrire de **façon unique** sous la forme  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ . Cette forme est appelée la **forme canonique** du trinôme.

La courbe représentative de  $f$  est appelée la **parabole et son équation est**  
 $y = ax^2 + bx + c$ .



Exemple :

Déterminer la forme canonique de la fonction suivante :

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 8 \quad f(x) = 2(x^2 - 2x + 4) \quad f(x) = 2[(x-1)^2 - 1 + 4] \quad f(x) = 2[(x-1)^2 + 3] \quad f(x) = 2(x-1)^2 + 6$$

**Propriété :**

---

Une parabole de sommet  $S(\alpha, \beta)$  est symétrique par rapport à la droite d'équation  $x = \alpha$ .

### 3. Sens de variation d'une fonction

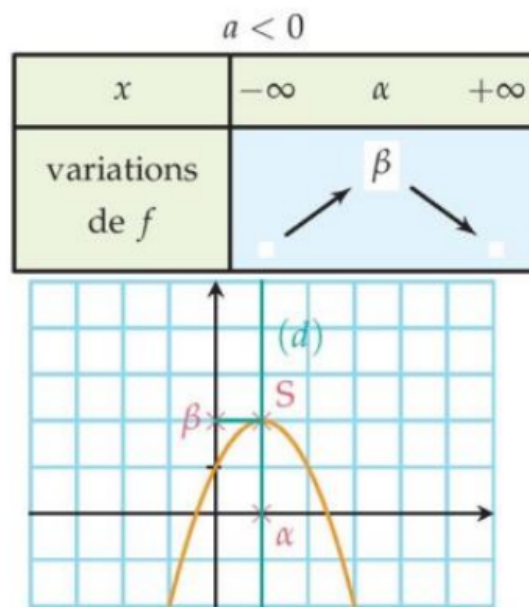
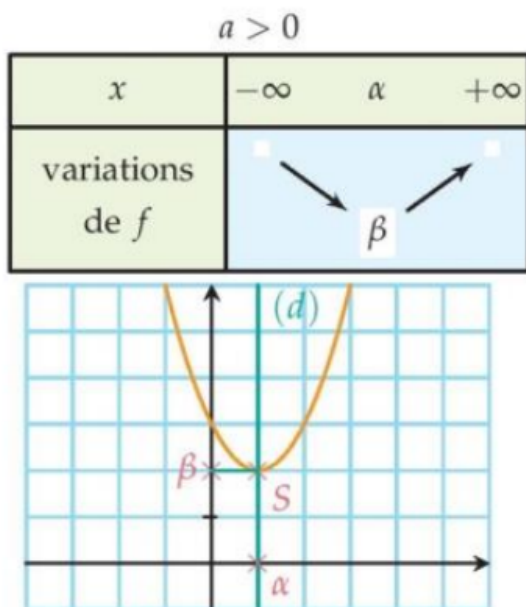
---

**Propriété :**

---

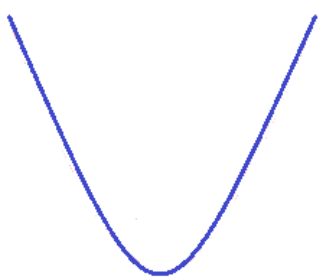
Soit  $f$  une fonction du second degré dont la forme canonique est  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .

Le sens de variation de  $f$  dépend du signe du nombre  $a$ .

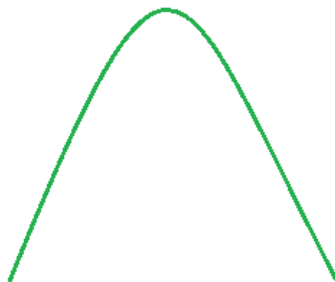


Vocabulaire :

- Si  $a > 0$ ,  $f$  admet un **minimum** en  $x = a$  égal à  $b$  que l'on peut traduire par "le sommet de la parabole est en bas" ou par " **$f$  est convexe**".
- Si  $a < 0$ ,  $f$  admet un **maximum** en  $x = a$  égal à  $b$  que l'on peut traduire par "le sommet de la parabole est en haut" ou par " **$f$  est concave**".



Parabole tournée vers le haut



Parabole tournée vers le bas

## II. les équation du second degré et trinôme

### 1. Résolution d'équations du second degré

## Définition : équation du second degré.

Une **équation du second degré** est une équation du type  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a, b, c$  trois nombres réels tel que  $a$  soit non nul.

## Définition : discriminant.

$\Delta = b^2 - 4ac$  est le discriminant du trinôme du second degré  $ax^2 + bx + c$ .

Vocabulaire :

On appelle **racine** du trinôme du second degré  $ax^2 + bx + c$  les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Les solutions de l'équation  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$  sont appelées **racines ou zéros** de la fonction  $f$ .

## Théorème :

Le nombre de solutions de l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  dépend du signe de  $\Delta$ .

### Résolution d'une équation du second degré

Calcul de  $\Delta$  :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Déduction de l'ensemble des solutions de l'équation :

En fonction de la valeur de  $\Delta$ , nous avons 3 cas distincts :

Si  $\Delta > 0$  :

L'équation admet **deux solutions dans  $\mathbb{R}$**  :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si  $\Delta = 0$  :

L'équation admet **une unique solution dans  $\mathbb{R}$**  :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Si  $\Delta < 0$  :

L'équation admet **deux solutions dans  $\mathbb{C}$**  :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

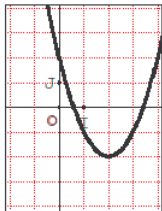
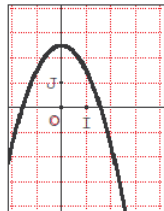
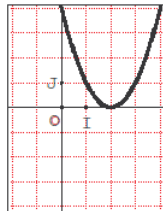
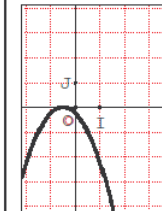
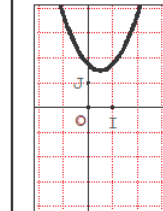
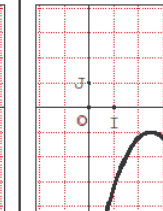
## 2. Le signe du trinôme

|              | Solutions de l'équation<br>$ax^2 + bx + c = 0$                                                              | Signe de<br>$P(x) = ax^2 + bx + c$                                                                                                                                                                                                                                                                        | Factorisation de<br>$P(x) = ax^2 + bx + c$ |              |           |           |              |              |                               |              |                       |              |                              |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------|-----------|-----------|--------------|--------------|-------------------------------|--------------|-----------------------|--------------|------------------------------|
| $\Delta > 0$ | Deux solutions distinctes<br>$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>P(x)</math></td><td>signe de <math>a</math></td><td>0</td><td>signe de <math>-a</math></td><td>signe de <math>a</math></td></tr></table> | $x$                                        | $-\infty$    | $x_1$     | $x_2$     | $+\infty$    | $P(x)$       | signe de $a$                  | 0            | signe de $-a$         | signe de $a$ | $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ |
| $x$          | $-\infty$                                                                                                   | $x_1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $x_2$                                      | $+\infty$    |           |           |              |              |                               |              |                       |              |                              |
| $P(x)$       | signe de $a$                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | signe de $-a$                              | signe de $a$ |           |           |              |              |                               |              |                       |              |                              |
| $\Delta = 0$ | Une solution double<br>$x_3 = -\frac{b}{2a}$                                                                | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_3</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>P(x)</math></td><td>signe de <math>a</math></td><td>0</td><td>signe de <math>a</math></td></tr></table>                                                           | $x$                                        | $-\infty$    | $x_3$     | $+\infty$ | $P(x)$       | signe de $a$ | 0                             | signe de $a$ | $P(x) = a(x - x_3)^2$ |              |                              |
| $x$          | $-\infty$                                                                                                   | $x_3$                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $+\infty$                                  |              |           |           |              |              |                               |              |                       |              |                              |
| $P(x)$       | signe de $a$                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | signe de $a$                               |              |           |           |              |              |                               |              |                       |              |                              |
| $\Delta < 0$ | Pas de solution                                                                                             | <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>P(x)</math></td><td colspan="2">signe de <math>a</math></td></tr></table>                                                                                                                  | $x$                                        | $-\infty$    | $+\infty$ | $P(x)$    | signe de $a$ |              | Pas de factorisation possible |              |                       |              |                              |
| $x$          | $-\infty$                                                                                                   | $+\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                            |              |           |           |              |              |                               |              |                       |              |                              |
| $P(x)$       | signe de $a$                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                            |              |           |           |              |              |                               |              |                       |              |                              |

Autre version de cette leçon

## I. Les équations en maths du second degré et les trinômes

$P(x) = ax^2 + bx + c$  est un **trinôme du second degré** ( $a$  non nul).

|                     | Si $\Delta > 0$                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                   | Si $\Delta = 0$                                                                                                   |                                                                                                                    | Si $\Delta < 0$                                                                                                     |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|---------------|------------|----------------------|------------|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---|-----------|----------|-----------|---------------|------------|------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---|-----------|-----------|---------------|------------|--|
| ALLURE DE LA COURBE | <p>Si <math>a &gt; 0</math></p>                                                                                                                                          | <p>Si <math>a &lt; 0</math></p>  | <p>Si <math>a &gt; 0</math></p>  | <p>Si <math>a &lt; 0</math></p>  | <p>Si <math>a &gt; 0</math></p>  | <p>Si <math>a &lt; 0</math></p>  |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
| SOMMET              | Le sommet S de la parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$                                                                                                                                                            |                                                                                                                   |                                                                                                                   |                                                                                                                    |                                                                                                                     |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
| VARIATIONS DE P     | Si $a > 0$ alors P est décroissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ , croissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$ . Si $a < 0$ alors P est croissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ , décroissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$                           |                                                                                                                   |                                                                                                                   |                                                                                                                    |                                                                                                                     |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
| RACINES             | deux racines: $\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$                                                                                                                                      |                                                                                                                   | une racine: $\alpha = -\frac{b}{2a}$                                                                              |                                                                                                                    | pas de racine                                                                                                       |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
| FACTORISATION       | $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                   | $P(x) = a(x - \alpha)^2$                                                                                          |                                                                                                                    | Pas de factorisation                                                                                                |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
| TABLEAUX DE SIGNES  | <table><tr><td>x</td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>Signe de P(x)</td><td>signe de a</td><td>opposé du signe de a</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table> |                                                                                                                   | x                                                                                                                 | $-\infty$                                                                                                          | $x_1$                                                                                                               | $x_2$                                                                                                               | $+\infty$ | Signe de P(x) | signe de a | opposé du signe de a | signe de a |  | <table><tr><td>x</td><td><math>-\infty</math></td><td><math>\alpha</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>Signe de P(x)</td><td>signe de a</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table> |  | x | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ | Signe de P(x) | signe de a | signe de a |  | <table><tr><td>x</td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>Signe de P(x)</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table> |  | x | $-\infty$ | $+\infty$ | Signe de P(x) | signe de a |  |
| x                   | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                                 | $x_1$                                                                                                             | $x_2$                                                                                                             | $+\infty$                                                                                                          |                                                                                                                     |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
| Signe de P(x)       | signe de a                                                                                                                                                                                                                                                | opposé du signe de a                                                                                              | signe de a                                                                                                        |                                                                                                                    |                                                                                                                     |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
| x                   | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                                 | $\alpha$                                                                                                          | $+\infty$                                                                                                         |                                                                                                                    |                                                                                                                     |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
| Signe de P(x)       | signe de a                                                                                                                                                                                                                                                | signe de a                                                                                                        |                                                                                                                   |                                                                                                                    |                                                                                                                     |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
| x                   | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                                 | $+\infty$                                                                                                         |                                                                                                                   |                                                                                                                    |                                                                                                                     |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |
| Signe de P(x)       | signe de a                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                   |                                                                                                                   |                                                                                                                    |                                                                                                                     |                                                                                                                     |           |               |            |                      |            |  |                                                                                                                                                                                                        |  |   |           |          |           |               |            |            |  |                                                                                                                                                         |  |   |           |           |               |            |  |

## II. Résolution des équations du second degré

