

Limites de fonctions et asymptotes

Ce qu'évalue le contrôle : limites de fonctions et asymptotes

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Limites de fonctions et continuité (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Calculer des limites de sommes, produits et quotients de fonctions en l'infini et en un réel
- Lever une forme indéterminée par factorisation du terme dominant ou par la quantité conjuguée
- Utiliser les croissances comparées de l'exponentielle et des puissances ainsi que les limites de fonctions composées
- Interpréter une limite finie ou infinie en termes d'asymptote horizontale ou verticale
- Étudier la position d'une courbe par rapport à son asymptote dans un contexte concret

Avant de commencer

Pour chaque limite, **écris d'abord la limite de chaque morceau** avant de conclure : tu

repères ainsi tout de suite si tu tombes sur une forme indéterminée. Dans ce cas, factorise par le **terme dominant**, car c'est lui qui impose le comportement. En un réel où le dénominateur s'annule, étudie son signe à gauche et à droite. Enfin, traduis chaque limite en phrase sur l'asymptote, puis vérifie qu'elle est cohérente avec la figure.

Le sujet du contrôle : limites de fonctions et asymptotes

Exercice 1 - Limites par opérations (3 points)

Détermine les limites suivantes en citant, à chaque fois, la limite de chaque morceau de l'expression. Aucune n'est une forme indéterminée.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x)$ (0,5 point)
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 3 + \frac{1}{x})$ (0,5 point)
3. La limite de $2 + \frac{1}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs positives, puis par valeurs négatives. (1 point)
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)(e^x + 2)$ (1 point)

Exercice 2 - Lever une indétermination (4 points)

Chacune des limites suivantes conduit d'abord à une forme indéterminée. Indique laquelle, puis lève-la par une transformation d'écriture.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5}$ (1 point)
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 4x^2 - 7)$ (1 point)

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ (1 point)

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x})$, en multipliant d'abord par la quantité conjuguée. (1 point)

Exercice 3 - Croissances comparées et composées (4 points)

Calcule les limites suivantes, puis justifie chaque étape.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$ (0,5 point)

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ (0,5 point)

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x)$, en factorisant par e^x . (1 point)

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-2x}{x+3}}$ (1 point)

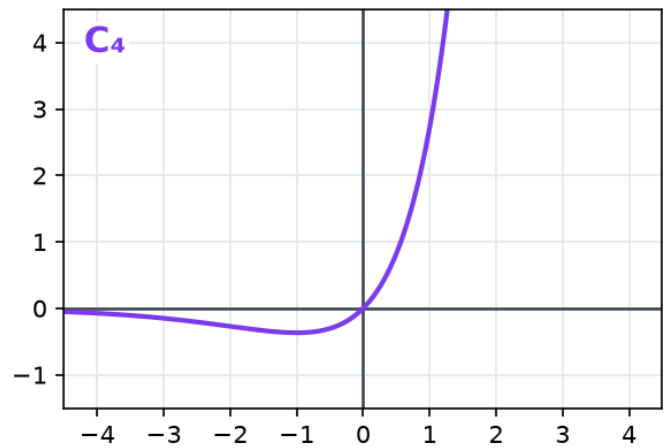
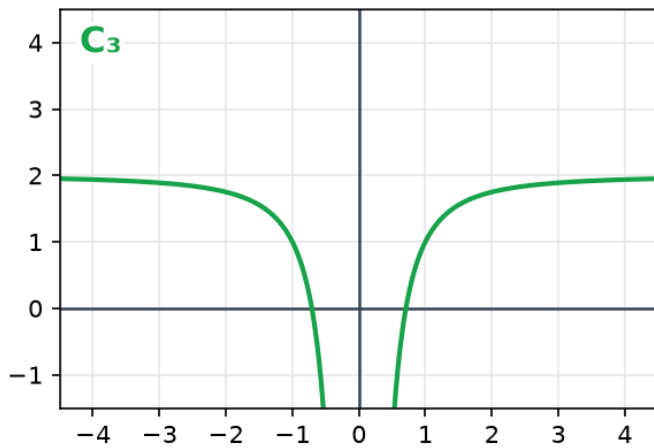
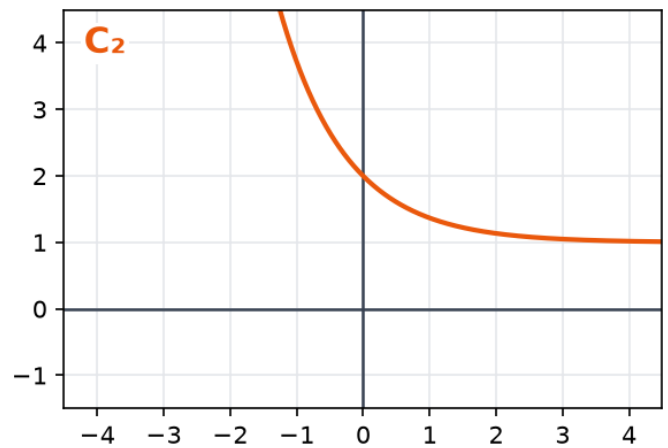
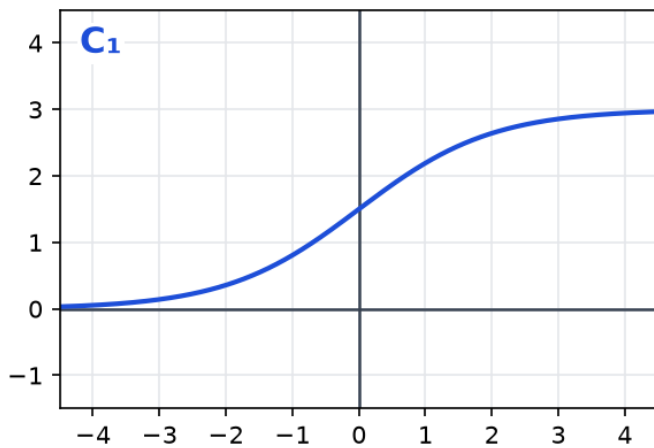
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x + x}{e^x + 1}$ (1 point)

Exercice 4 - Quatre courbes à identifier (3 points)

On considère les quatre fonctions suivantes :

- $f(x) = 1 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$;
- $g(x) = x e^x$ sur $\mathbb{R}$;
- $h(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$;
- $k(x) = \frac{3e^x}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Leurs courbes représentatives sont tracées ci-dessous, mais dans le désordre.

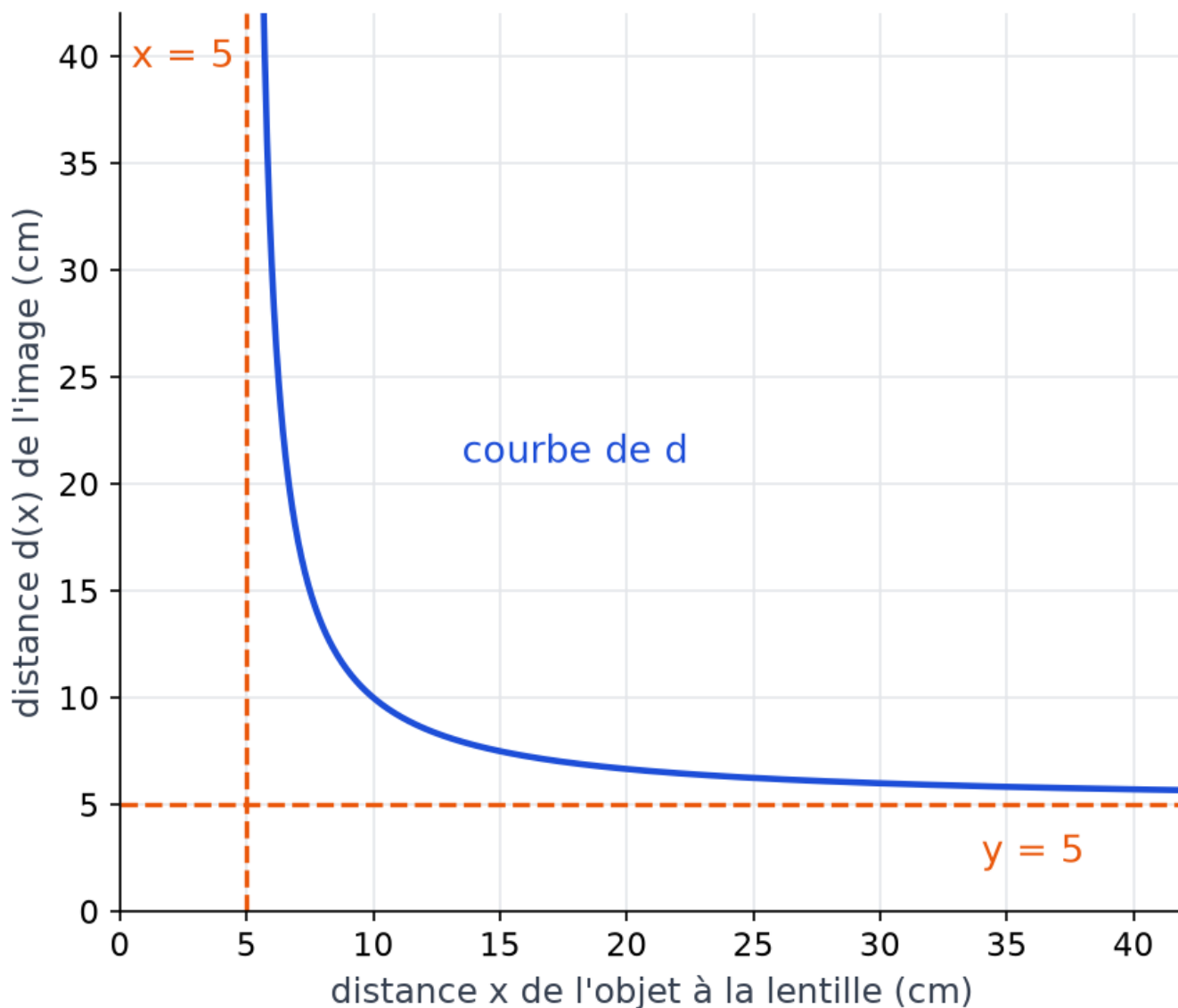


1. Calcule les limites de f , g et h en $-\infty$ et en $+\infty$, ainsi que celles de h en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0. (2 points)
2. Associe alors chaque courbe à sa fonction, en justifiant par les asymptotes. (1 point)

Exercice 5 - L'image formée par une loupe (6 points)

Inès étudie en physique une loupe, c'est-à-dire une lentille convergente de distance focale 5 cm. Quand elle place un objet à une distance x de la lentille, avec $x > 5$ (en cm), l'image nette se forme à une distance $d(x)$ de l'autre côté, donnée par :

$$d(x) = \frac{5x}{x-5}$$



1. Calcule la limite de $d(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Donne ensuite l'équation de l'asymptote correspondante, puis interprète ce résultat pour un objet très éloigné. (1,5 point)
2. Calcule la limite de $d(x)$ quand x tend vers 5 par valeurs supérieures. Quelle asymptote en déduis-tu ? Que devient l'image quand l'objet s'approche du foyer ? (1,5 point)
3. Montre que, pour tout $x > 5$, $d(x) = 5 + \frac{25}{x-5}$. Déduis-en la position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale. (1,5 point)
4. L'écran d'Inès ne peut pas être placé à plus de 30 cm de la lentille. À quelle distance minimale doit-elle donc placer l'objet pour obtenir une image nette sur l'écran ? (1,5 point)



Réviser limites de fonctions et asymptotes avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon limites de suites et de fonctions et continuité ; entraîne-toi sur la fiche limites de fonctions et la continuité et fonction exponentielle avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Continuité et valeurs intermédiaires : contrôle de maths en terminale
- Raisonnement par récurrence : contrôle de maths en terminale
- Limites de suites et convergence : contrôle de maths en terminale