

Limites de suites et convergence

Ce qu'évalue le contrôle : limites de suites et convergence

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **2 heures**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Suites et raisonnement par récurrence (4 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Calculer la limite d'une suite par opérations en levant une forme indéterminée par factorisation
- Utiliser les théorèmes de comparaison et le théorème des gendarmes pour déterminer une limite
- Démontrer qu'une suite définie par récurrence est monotone et bornée, puis en déduire sa convergence
- Déterminer la limite d'une suite récurrente comme point fixe d'une fonction continue
- Étudier une suite arithmético-géométrique à l'aide d'une suite auxiliaire géométrique et compléter un algorithme de seuil

Avant de commencer

Avant de conclure sur une limite, identifie toujours la **forme obtenue** : si elle est indéterminée,

factorise par le terme dominant. Pour une suite qui contient $(-1)^n$, un sinus ou un cosinus, pense tout de suite à un **encadrement**. Dans le problème, les questions s'enchaînent, mais chaque résultat est donné : tu peux donc l'admettre pour continuer. Vérifie enfin tes réponses avec le **nuage de points** fourni.

Le sujet du contrôle : limites de suites et convergence

Exercice 1 - Limites par opérations (4 points)

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = 3n^2 - 5n + 2 ; v_n = \frac{2n^2 + 15n^2 - n + 3}{n^2} ; w_n = 4 - 3 \times 0,6^n ; t_n = 2^n - 5^n.$$

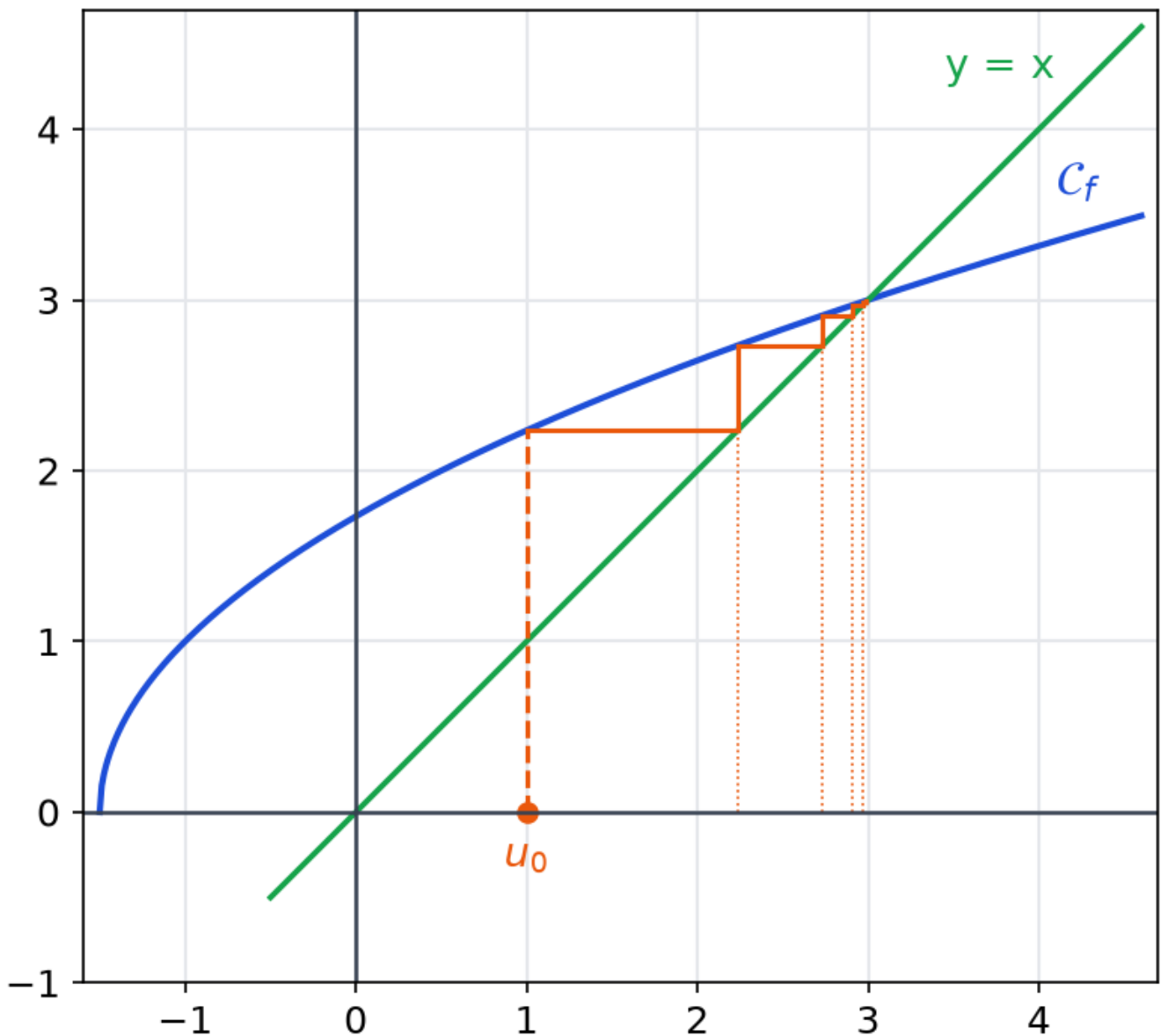
1. Détermine d'abord la limite de (u_n) , en levant l'indétermination. (1 point)
2. Calcule ensuite la limite de (v_n) . (1 point)
3. Quelle est la limite de (w_n) ? Justifie à l'aide d'une propriété du cours. (1 point)
4. Enfin, étudie la limite de (t_n) , par exemple en factorisant par 5^n . (1 point)

Exercice 2 - Comparaison et encadrement (4 points)

1. Soit $a_n = 2n + \cos(n)$ pour tout entier naturel n . Montre d'abord que $a_n \geq 2n - 1$, puis déduis-en la limite de (a_n) . (1,5 point)
2. Soit $b_n = \frac{3 + (-1)^n}{n} + 1$ pour tout entier naturel n . Encadre b_n entre deux suites simples, puis détermine sa limite en citant le théorème utilisé. (1,5 point)
3. Soit enfin $c_n = \frac{5n + \sin(n)}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$. Détermine la limite de (c_n) . (1 point)

Exercice 3 - Une suite croissante et majorée (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[-1,5; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+3}$, ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que f est croissante sur son ensemble de définition. Le graphique ci-dessous montre la courbe de f , la droite d'équation $y = x$ et la construction des premiers termes.

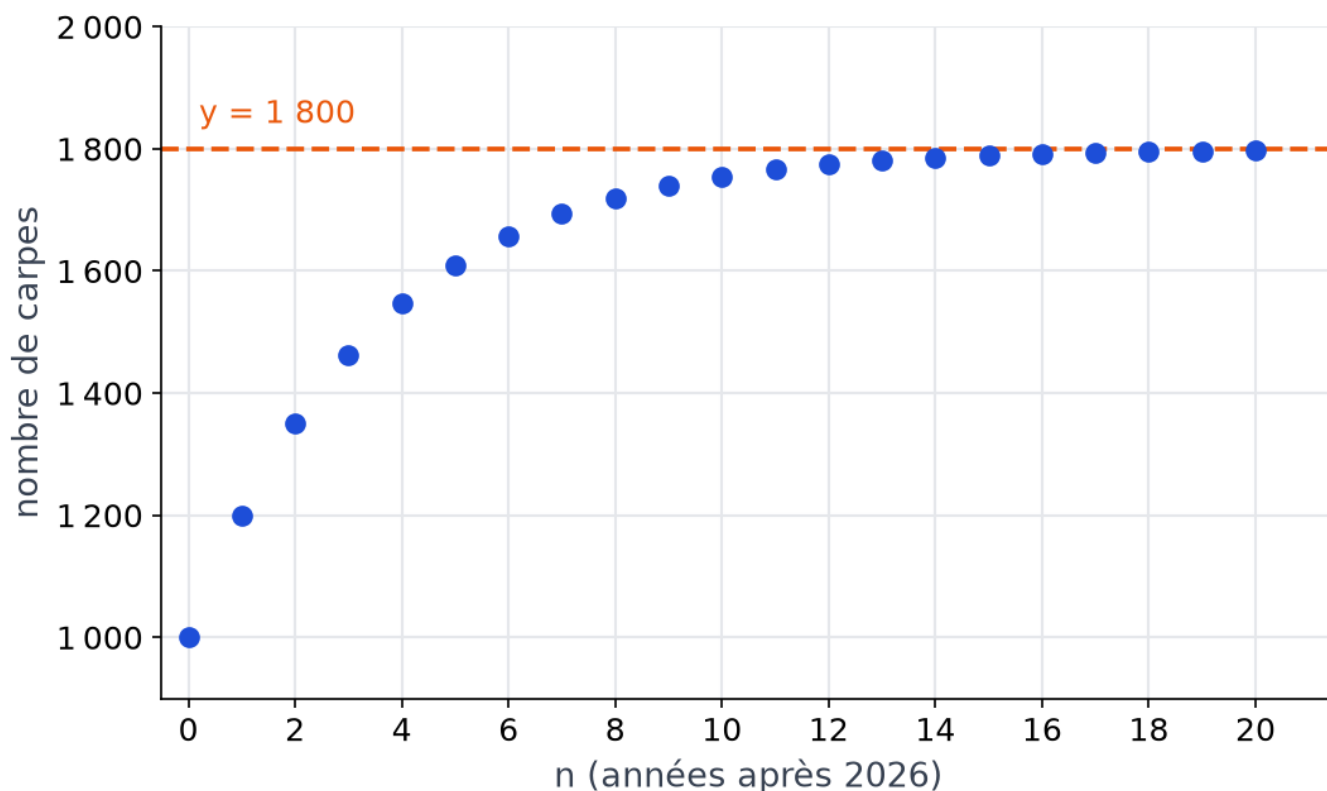


1. Place u_1 , u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses, puis conjecture le sens de variation et la limite de (u_n) . (1 point)
2. Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. (1,5 point)

3. Déduis-en alors que la suite (u_n) converge. (0,5 point)
4. On note ℓ sa limite. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, car f est continue. Détermine ainsi la valeur de ℓ . (1 point)

Exercice 4 - Les carpes de l'étang (8 points)

Au 1^{er} janvier 2026, un étang contient 1 000 carpes. Chaque année, les p  cheurs prélèvent 25% des carpes présentes, puis l'association de pêche introduit 450 jeunes carpes. On modélise la population par la suite (u_n) , où u_n est le nombre de carpes au 1^{er} janvier de l'année 2026 + n . Ainsi, $u_0 = 1000$.



1. Justifie que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 450$. Calcule ensuite u_1 et u_2 . (1 point)
2. On pose $v_n = u_n - 1800$ pour tout entier naturel n . Montre que (v_n) est géométrique, et précise sa raison et son premier terme. (1,5 point)
3. Exprime v_n en fonction de n , puis vérifie que $u_n = 1800 - 800 \times 0,75^n$. (1 point)

4. Étudie le sens de variation de la suite (u_n) . (1 point)
5. Détermine la limite de (u_n) et interprète-la dans le contexte. Est-ce cohérent avec le nuage de points ? (1 point)

L'association souhaite savoir à partir de quelle année l'étang comptera au moins 1 750 carpes. Pour cela, elle écrit la fonction Python ci-dessous, dont deux lignes sont incomplètes.

```
1  def seuil():
2      n = 0
3      u = 1000
4      while ..... :
5          n = n + 1
6          u = .....
7      return n
```

6. Recopie puis complète les lignes 4 et 6 de la fonction. (1 point)
7. Quelle valeur renvoie cette fonction ? Justifie par un calcul de termes, puis réponds à la question de l'association. (1,5 point)



Réviser limites de suites et convergence avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon le raisonnement par récurrence puis suites numériques ; entraîne-toi sur la fiche raisonnement par récurrence et limites de suites avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Raisonnement par récurrence : contrôle de maths en terminale
- Suites et logarithme népérien : contrôle de maths en terminale
- Limites de fonctions et asymptotes : contrôle de maths en terminale