

Limites de suites et de fonctions et continuité

I. Limite d'une fonction en l'infini

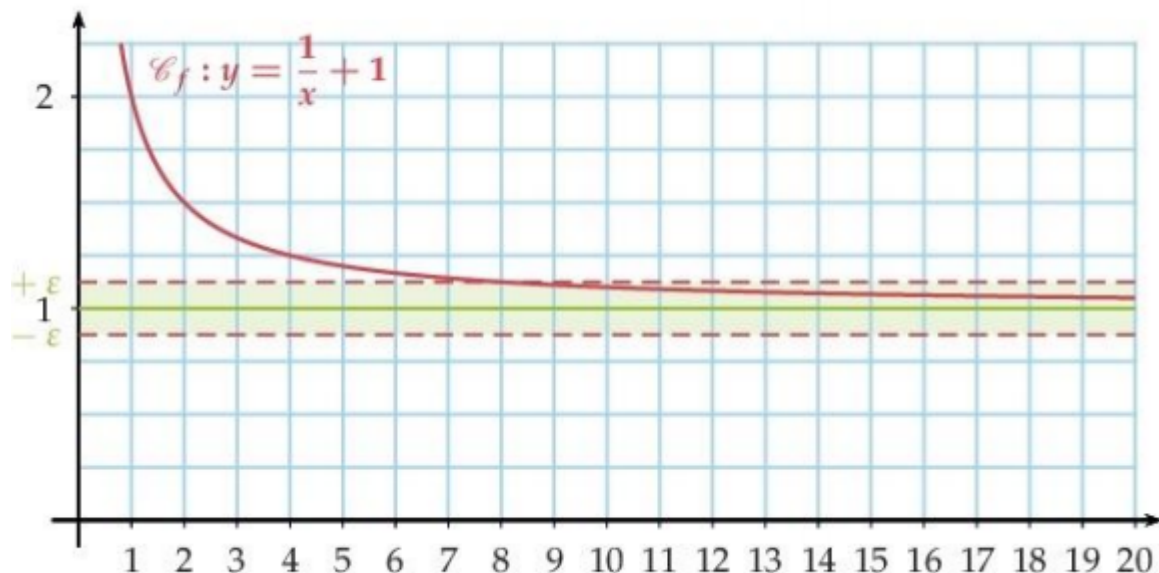
1. Limite finie en l'infini

Définition :

On considère une fonction f définie au moins sur un intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a; +\infty[$.

La fonction f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



Définition : asymptote horizontale.

La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à C_f lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Propriété : limite finie des fonctions usuelles en l'infini.

On considère n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

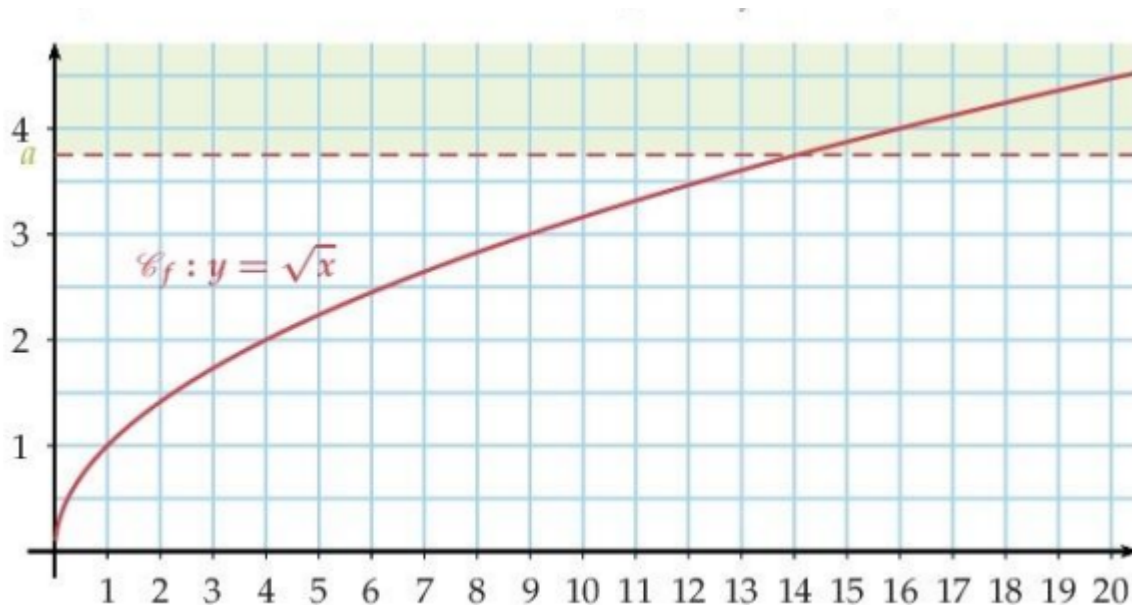
2.Limite infinie en l'infini

Propriété :

La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a; +\infty[$ contient

toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



Propriété : limite infinie des fonctions usuelles en l'infini.

On considère n un entier naturel non nul.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ pour n impair et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ pour n pair.

II. Limite infinie en un réel

Définition :

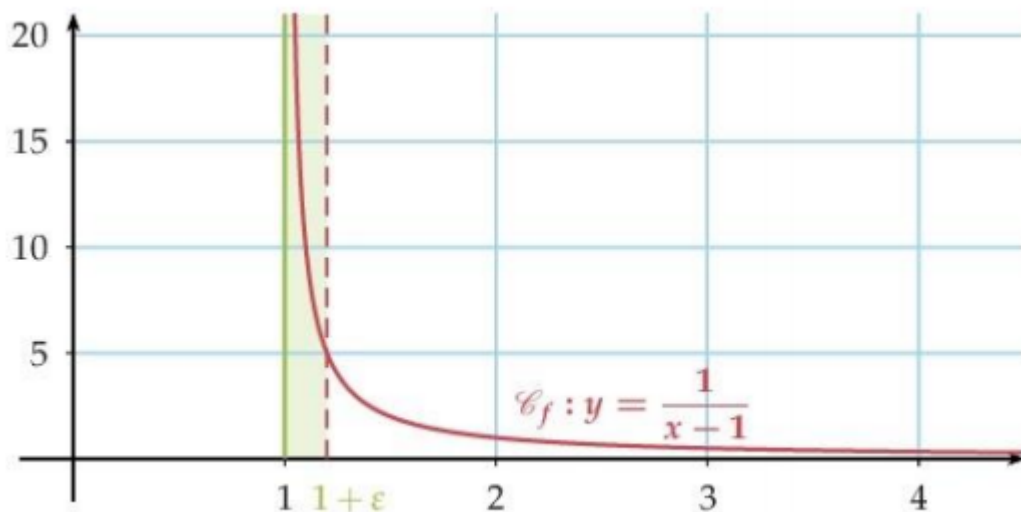
On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ du type $]x_0 - \epsilon; x_0[$ ou $]x_0; x_0 + \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$.

La fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]A; +\infty[$ contient

toutes les valeurs

de $f(x)$ pour x assez proche de x_0 .

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.



Définition : asymptote verticale.

La droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à C_f lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$.

Propriété : limite des fonctions usuelles en 0.

On considère n un entier naturel non nul.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ pour n impair et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ pour n pair.

III. Opérations sur les limites

Propriété : limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions.

■ Limite d'une somme :

f	g	$f + g$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	???

■ Limite d'un produit :

f	g	fg
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell \neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	???

■ Limite d'un quotient :

f	g	f/g
ℓ	$\ell' \neq 0$	ℓ/ℓ'
$\ell \neq 0$	0	∞
ℓ	∞	0
0	0	???
∞	∞	???

IV. Limite d'une fonction composée

1. Fonction composée

Définition :

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F , et soit g une fonction définie sur F .

La composée de f suivie de g est la fonction notée $g \circ f$ définie sur E par $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

2. Théorème de composition des limites

Théorème :

Soit h la composée de la fonction f suivie de g et α, β, γ trois réels ou $\pm, \infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$ et $\lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \gamma$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \gamma$.

V.Limites et comparaison de fonctions

1.Théorème de comparaison

Théorème :

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $] \alpha ; +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty. \quad \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $] -\infty ; \beta[$ de $\mathbb{R}$.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty. \quad \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $] \alpha ; \beta[$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in] \alpha ; \beta[$.

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty. \quad \blacksquare \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

2.Théorème d'encadrements dit des gendarmes ou du sandwich

Théorème :

Soit deux nombres réels α et l et trois fonctions f, g et h telles que pour tout $x > \alpha$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$.

VI. Continuité d'une fonction

Propriété :

- Les fonctions usuelles (affines, carrés, racines carrées, cubes, inverses, valeur absolues) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition.
- Toute **fonction construite algébriquement** à l'aide de fonctions usuelles est continue sur tout intervalle de son domaine de définition
- On convient qu'une **flèche oblique dans un tableau de variation** traduit la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.
- Un **fonction dérivable sur un intervalle est continue** sur cet intervalle.

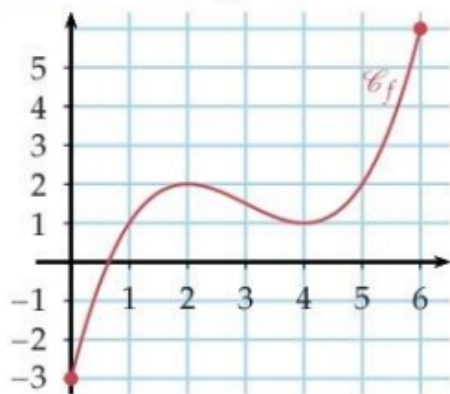
VII. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.

Si f est continue sur $[a, b]$ alors pour tout réel k compris tel que $f(a) < k < f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 6]$ par $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



On dresse le tableau de variation de f .

f admet pour minimum -3 et pour maximum 6 .

f est continue sur $[0 ; 6]$.

x	0	2	4	6
f	-3	2	1	6

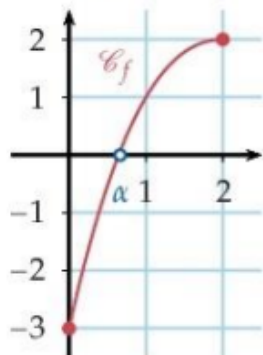
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs de $[-3 ; 6]$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0 ; 6]$.

Théorème : cas d'une fonction strictement monotone.

On considère f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.

Si f est continue et **strictement monotone** sur $[a, b]$ alors pour tout réel k compris tel que $f(a) < k < f(b)$, **il existe un unique réel c** appartenant à $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Reprenons la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{4} - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



x	0	α	2
f	-3	0	2

Sur $[0 ; 2]$, f est continue, strictement croissante et admet pour minimum -3 et maximum 2 .

Donc, f prend une fois, et une seule, toutes les valeurs intermédiaires entre -3 et 2 .

En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α entre 0 et 2 .

Autre version de cette leçon

I. Limite d'une somme de deux fonctions

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

En $+\infty$ ou en $-\infty$, la limite d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.

II. Limite d'une différence de deux fonctions

Utiliser : $f - g = f + (-g)$ et le tableau précédent.

III. Limite d'un produit de deux fonctions

$\lim f$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

IV. Limite de l'inverse d'une fonction

Dans le tableau ci-dessous, la limite de f égale à 0^+ , signifie, qu'à l'endroit où la limite est prise, cette limite est zéro et que, pour tout x suffisamment proche de cet endroit, on a $f(x) > 0$. Définition analogue pour 0^- , mais avec $f(x) < 0$.

$\lim f$	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim 1/f$	$1/\ell$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

V. Limite d'un quotient de deux fonctions

On peut utiliser: $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et avec les deux tableaux précédents, il est possible de conclure.

En $+\infty$ ou en $-\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

On peut aussi retenir les résultats suivants :

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim f/g$	ℓ/ℓ'	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

Ce tableau est simplifié: $\pm\infty$ signifie $+\infty$ ou bien $-\infty$.

Pour décider, on applique la règle du signe du quotient selon les signes de f et de g au voisinage de l'endroit où la limite est cherchée.

VI. Limite des fonctions de références.

limite en:	Valeurs de la limite:			
	1	0	$+\infty$	$-\infty$
0	$x \mapsto \frac{\sin x}{x}$	$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto x $	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec n pair $x \mapsto \frac{1}{ x }$	
0 à droite		$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	
0 à gauche				$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec n impair
$+\infty$		$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto \frac{1}{ x }$ $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto x $ $x \mapsto \sqrt{x}$	
$-\infty$		$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ $x \mapsto \frac{1}{ x }$	$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec n pair $x \mapsto x $	$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ avec n impair

I. Suites et fonctions: étude comparative.

Remarque :

Les suites numériques étant des fonctions particulières (définies sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$), on retrouvera nécessairement pour les suites et les fonctions, des propriétés analogues.

Toutes les propriétés ne seront pas reprises ici, mais seulement celles dont la comparaison est instructive.

Les suites apparaîtront dans la colonne de droite et les fonction numériques dans celle de gauche. Sauf cas particuliers, les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ ou éventuellement une partie de $\mathbb{N}$ (à partir d'un certain rang n_0) et les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ (la plupart du temps sur un intervalle I).

1 Sens de variation de fonctions et de suites numériques.

f croissante sur $I \Leftrightarrow$ Pour tout $a \in I$ et $b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$	(U_n) croissante Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $U_n \leq U_{n+1}$
f strictement croissante sur $I \Leftrightarrow$ Pour tout $a \in I$ et $b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$	(U_n) strictement croissante Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $U_n < U_{n+1}$
f décroissante sur $I \Leftrightarrow$ Pour tout $a \in I$ et $b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$	(U_n) décroissante Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $U_n \geq U_{n+1}$
f strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow$ Pour tout $a \in I$ et $b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$	(U_n) strictement décroissante Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $U_n > U_{n+1}$
f constante sur $I \Leftrightarrow$ Pour tout $a \in I$ et $b \in I$, si $a \leq b$ alors $f(a) = f(b)$	(U_n) constante Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $U_n = U_{n+1}$
f monotone sur $I \Leftrightarrow f$ conserve le même sens de variation sur l'intervalle I	(U_n) monotone (U_n) est soit croissante, soit décroissante, soit constante.
Si f est dérivable sur I , alors: f croissante sur I Pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$	
Si f est dérivable sur I , alors: f décroissante sur I Pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$	
Si f est dérivable sur I , alors: f constante sur I Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$	

Remarque:

Il se peut que cela ne se réalise pas sur tout l'ensemble N : préciser alors à partir de quel rang cela est vrai.

2.Suites et fonctions majorées, minorées, bornées.

f majorée sur $I \Leftrightarrow$ Il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $x \in I$, on ait: $f(x) \leq M$	(U_n) majorée $\Leftrightarrow$ Il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait: $U_n \leq M$
f minorée sur $I \Leftrightarrow$ Il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $x \in I$, on ait: $f(x) \geq m$	(U_n) minorée $\Leftrightarrow$ Il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, on ait: $U_n \geq m$
f bornée sur $I \Leftrightarrow f$ est majorée et minorée sur I	(U_n) bornée $\Leftrightarrow (U_n)$ est majorée et minorée

II.Limites de suites et de fonctions.

1.Limite finie ($l \in \mathbb{R}$) et limite en $+\infty$ de fonctions et suites.

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, on dit que f tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$. On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Dans cette situation, la représentation graphique de f possède alors une **asymptote horizontale** d'équation $y = l$ en $+\infty$.

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

Si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi tous les termes de la suite (U_n) à partir d'un certain rang, on dit que (U_n) converge vers l . On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$.

Exemple:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - \frac{1}{2^n} = 5$$

2.Limite finie en $-\infty$ de fonctions numériques.

Propriété :

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de la forme $]-\infty; A]$ où $A \in \mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour $-x$ assez grand, on dit que f tend vers l lorsque x tend vers $-\infty$.

On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

Dans cette situation, la représentation graphique de f possède alors une **asymptote horizontale** d'équation $y = l$ en $-\infty$.

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

3.Limite finie d'une fonction en un point $a \in \mathbb{R}$

Propriété :

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle I contenant $a \in \mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout $x \in I$ assez proche de a , on dit que f tend vers l lorsque x tend vers a .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

II. Cas où la fonction ou la suite n'a pas de limite.

Sans entrer dans les détails théoriques, nous allons citer quelques exemples de fonctions et de suites ne possédant pas de limite. Il est intéressant de visualiser ces exemples sur une calculatrice graphique.

1. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

Nous avons: Si $x > 0$, $f(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ et si $x < 0$, $f(x) = -1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

Les limites à gauche et à droite de 0 existent, mais sont différentes donc **f n'a pas de limite en 0.**

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sin n$ prend une infinité de valeurs sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, sans jamais se rapprocher d'une valeur limite.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1, donc pas de limite.

III. Le théorèmes de comparaison

Théorème :

Pour les fonctions, dans les propriétés ci-dessous, la lettre a désigne aussi bien un réel que $+\infty$ ou $-\infty$.

Lorsque $a = +\infty$, les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle I de la forme $[A ; +\infty[$ où A est un réel.

Lorsque $a = -\infty$, les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle I de la forme $] -\infty ; A]$ où A est un réel.

Lorsque $a \in \mathbb{R}$, les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle I de la forme $[A ; B]$ où A et B sont des réels et $a \in [A ; B]$.

Si la limite concernée est la limite à gauche de a , les fonctions sont définies sur un intervalle I de la forme $] -\infty ; a [$ ou $[A ; a [$ où A est un réel.

Si la limite concernée est la limite à droite de a , les fonctions sont définies sur un intervalle I de la forme $] a ; +\infty [$ ou $] a ; A]$ où A est un réel.

Pour les suites, l'indice n est un entier naturel supérieur ou égal à un certain rang n_0 (qui sera souvent 0).

IV. Théorème de composition de deux fonctions:

Théorème :

Si f est une fonction définie sur un intervalle J tel que, pour tout $x \in I$, on ait:

$y = u(x) \in J$, c'est à dire: $u(I) \subset J$.

Si on a aussi $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = l$.

Si f est une fonction définie sur un intervalle J tel que:

pour tout entier $n \geq n_0$ on ait: $u_n \in J$

Si on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$.