Limites et continuité de fonctions

I.Limite d'une fonction en l'infini

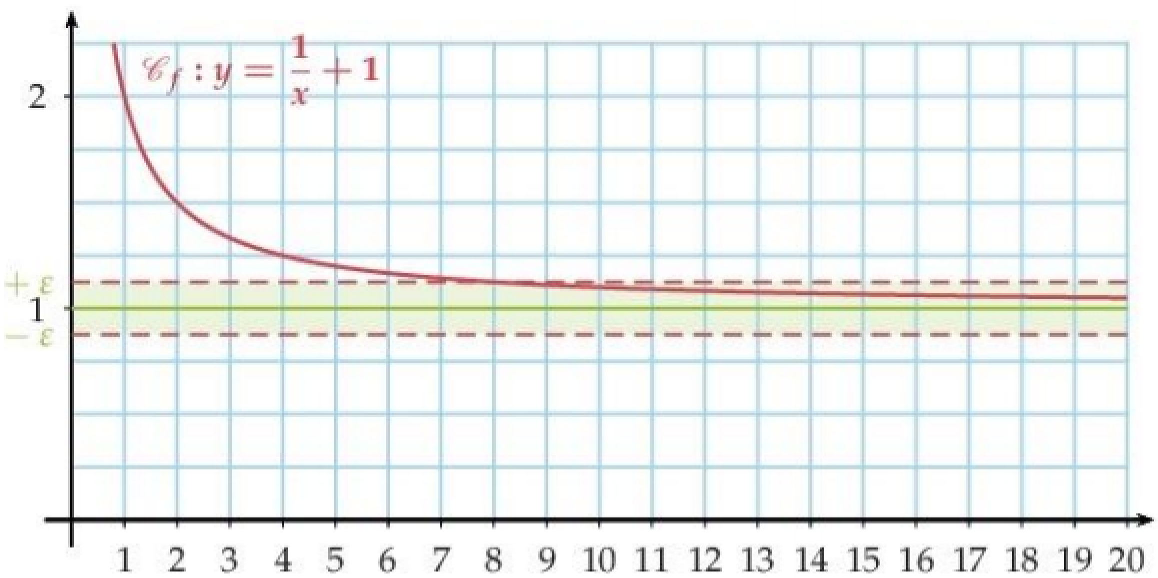
1.Limite finie en l'infini

Définition :

On considère une fonction f définie au moins sur un intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a;+\infty[$.

La fonction f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand.

On note alors : $\lim_{xarrow+\infty} f(x) = l$.



Définition : asymptote horizontale.

La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à C_f lorsque $\lim_{xarrow+\infty} f(x) = l$.

Propriété : limite finie des fonctions usuelles en l'infini.

On considère n un entier naturel non nul.

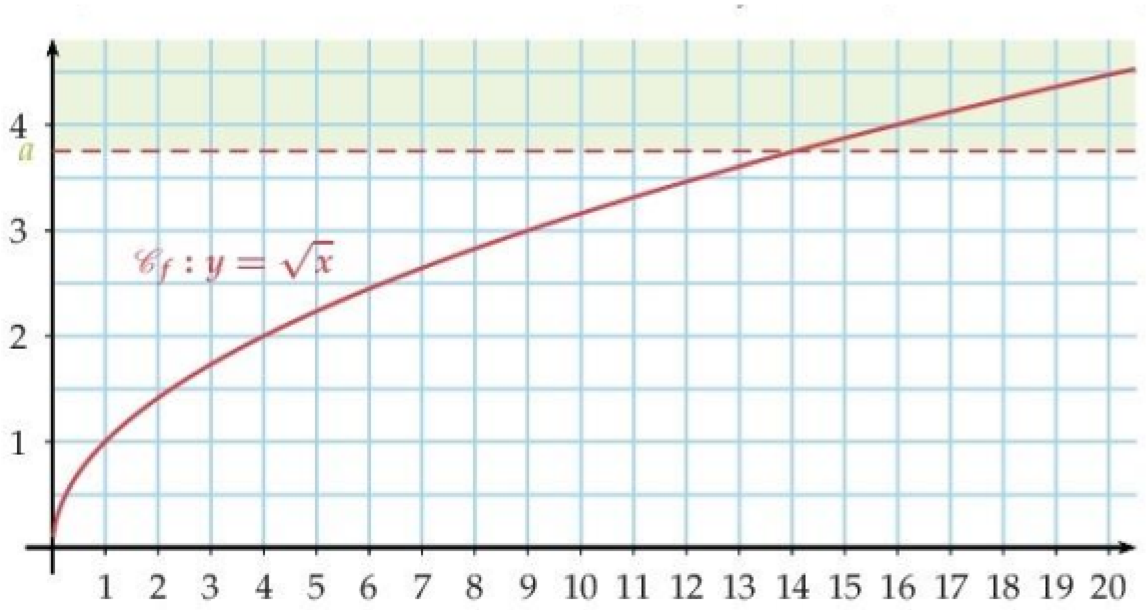
$\lim_{xarrow+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{xarrow+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{xarrow-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

2.Limite infinie en l'infini

Propriété :

La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a;+\infty[$ contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand.

On note alors $\lim_{xarrow+\infty} f(x) = +\infty$.



Propriété : limite infinie des fonctions usuelles en l'infini.

On considère n un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ pour n impair et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ pour n pair.

II.Limite infinie en un réel

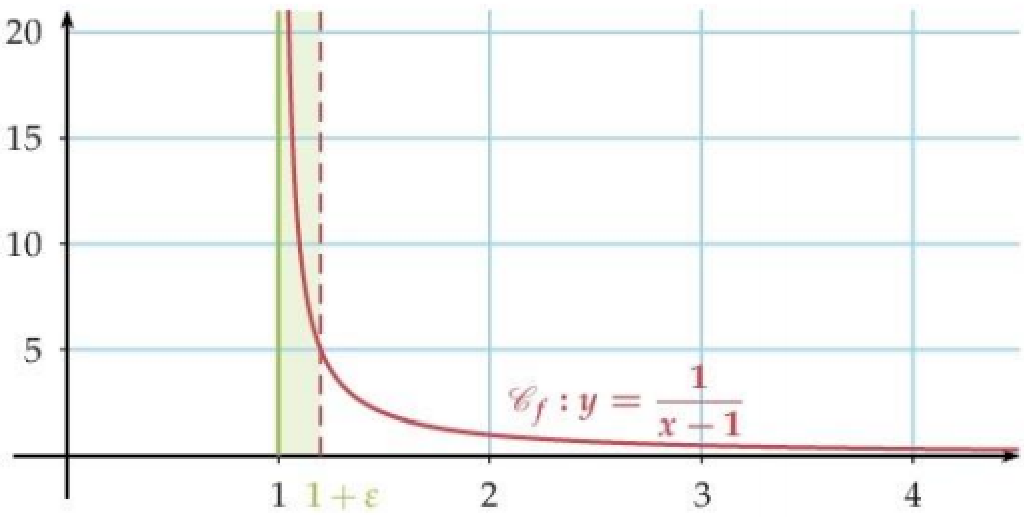
Définition :

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ du type $]x_0 - \epsilon\,; x_0[$ ou $]x_0\,; x_0 + \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$.

La fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs

de f(x) pour x assez proche de x_0.

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.



Définition : asymptote verticale.

La droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à C_f lorsque $\lim\limits_{x arrow x_0} f(x) = \pm\infty$.

Propriété : limite des fonctions usuelles en 0.

On considère n un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x arrow, 0^+}, \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; $\lim\limits_{x arrow, 0^+}, \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x arrow, 0^-}, \frac{1}{x^n} = -\infty$ pour n impair et $\lim\limits_{x arrow, 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ pour n pair.

III.Opérations sur les limites

Propriété : limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions.

- Limite d'une somme :

f	g	$f+g$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	???

- Limite d'un produit :

f	g	fg
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	???

- Limite d'un quotient :

f	g	f/g
ℓ	$\ell'\neq0$	ℓ/ℓ'
$\ell\neq0$	0	∞
ℓ	∞	0
0	0	???
∞	∞	???

IV.Limite d'une fonction composée

1.Fonction composée

Définition :

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F, et soit g une fonction définie sur F.

La composée de f suivie de g est la fonction notée gof définie sur E par $gof(x)=g[f(x)]$.

2.Théorème de composition des limites

Théorème :

Soit h la composée de la fonction f suivie de g et $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ trois réels ou $\pm,\infty$.

Si $\lim_{xarrow\,\alpha} f(x)=\beta$ et $\lim_{xarrow\,\beta} f(x)=\gamma$ alors $\lim_{xarrow\,\alpha} h(x)=\gamma$.

V.Limites et comparaison de fonctions

1.Théorème de comparaison

Théorème :

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]-\infty\,;\,\beta[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\,;\,\beta[$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in]\alpha\,;\,\beta[$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

2.Théorème d'encadrements dit des gendarmes ou du sandwich

Théorème :

Soit deux nombres réels α et l et trois fonctions f, g et h telles que pour tout $x > \alpha$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim\limits_{xarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{xarrow +\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{xarrow +\infty} g(x) = l$.

VI. Continuité d'une fonction

Propriété :

- Les fonctions usuelles (affines, carrés, racines carrées, cubes, inverses, valeur absolues) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition.

- Toute **fonction construite algébriquement** à l'aide de fonctions usuelles est continue sur tout intervalle de son domaine de définition

- On convient qu'une **flèche oblique dans un tableau de variation** traduit la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

- Un **fonction dérivable sur un intervalle est continue** sur cet intervalle.

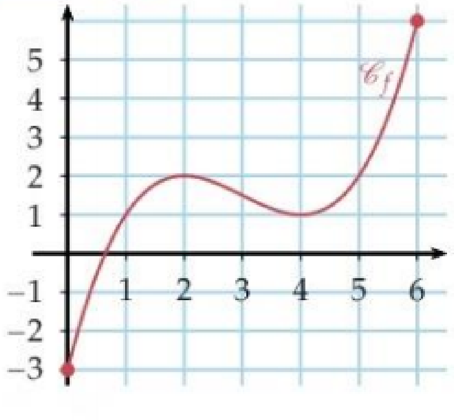
VII. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que a<b.

Si f est continue sur [a , b] alors pour tout réel k compris tel que f(a)<k<f(b), il existe au moins un réel c appartenant à [a , b] tel que f(c)=k.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 6]$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



On dresse le tableau de variation de f.

f admet pour minimum -3 et pour maximum 6.

f est continue sur $[0\ ;\ 6]$.

x	0		2		4		6
f	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

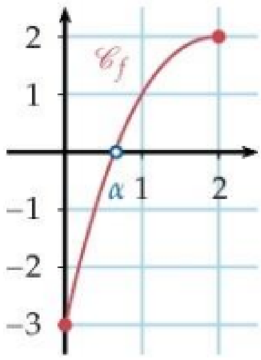
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs de $[-3\ ;\ 6]$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0\ ;\ 6]$.

Théorème : cas d'une fonction strictement monotone.

On considère f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que a<b.

Si f est continue et **strictement monotone** sur [a , b] alors pour tout réel k compris tel que f(a)<k<f(b), **il existe un unique réel c** appartenant à [a , b] tel que f(c)=k.

Reprenons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



x	0		α		2
f	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

Sur $[0\ ;\ 2]$, f est continue, strictement croissante et admet pour minimum -3 et maximum 2.
Donc, f prend une fois, et une seule, toutes les valeurs intermédiaires entre -3 et 2.
En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α entre 0 et 2.