Cours de maths en terminale

Limites et continuité de fonctions

La limite d'une fonction est un concept fondamental qui décrit le comportement d'une fonction lorsque les valeurs d'entrée se rapprochent de plus en plus d'un certain point ou d'une certaine valeur.

I.Limite d'une fonction en l'infini

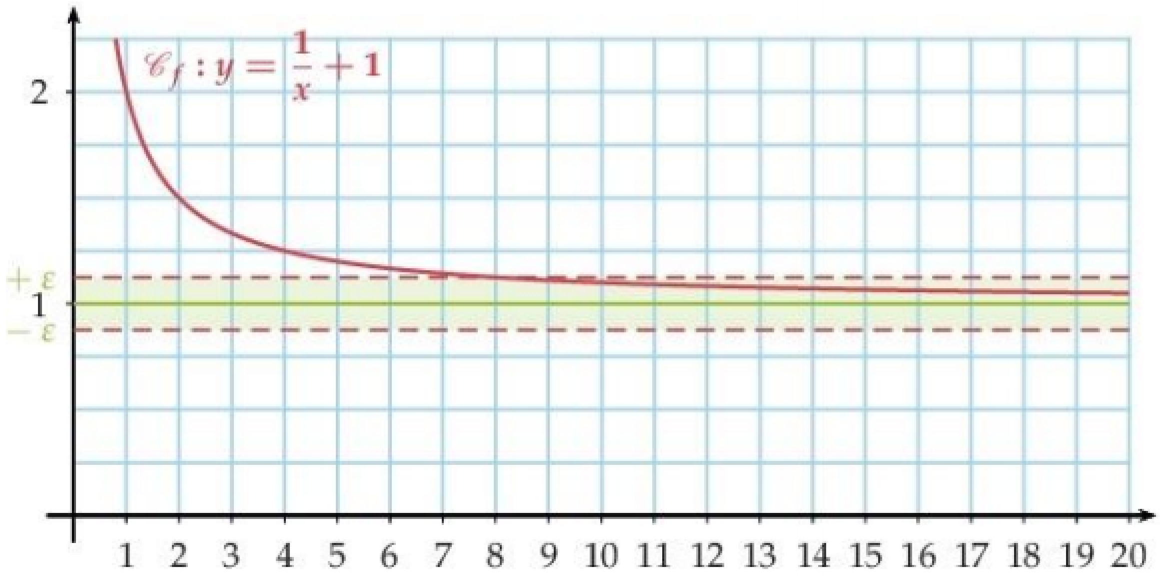
1.Limite finie en l'infini

Définition :

On considère une fonction f définie au moins sur un intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a;+\infty[$.

La fonction f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand.

On note alors : $\lim_{xarrow +\infty} f(x) = l$.



Définition : asymptote horizontale.

La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à C_f lorsque $\lim_{xarrow +\infty} f(x) = l$.

Propriété : limite finie des fonctions usuelles en l'infini.

On considère n un entier naturel non nul.

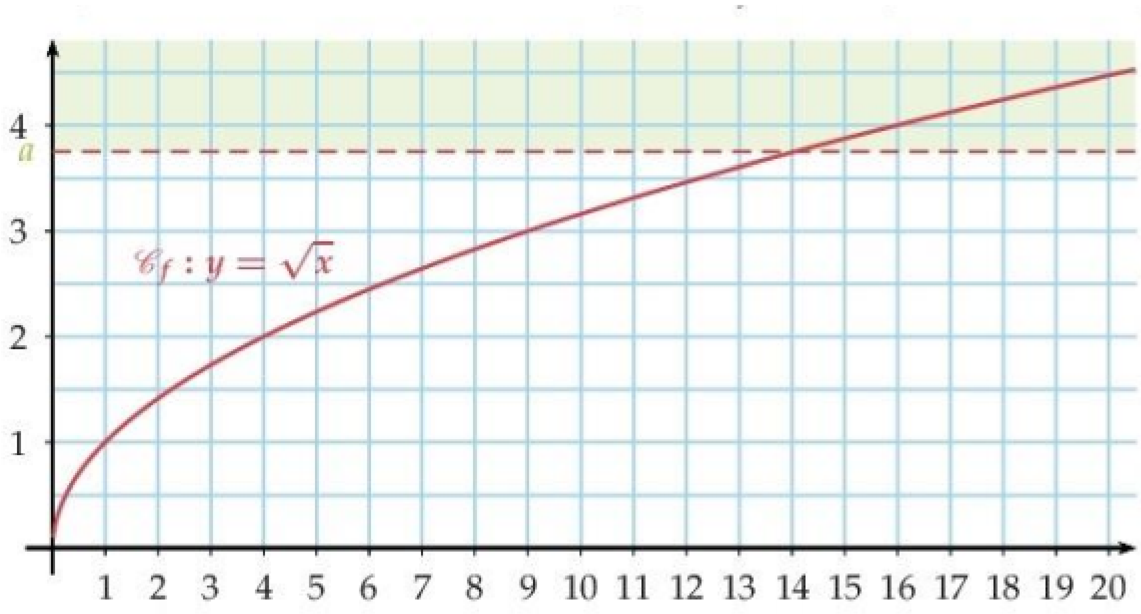
$\lim_{xarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{xarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{xarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

2.Limite infinie en l'infini

Propriété :

La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a;+\infty[$ contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand.

On note alors $\lim_{xarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



Propriété : limite infinie des fonctions usuelles en l'infini.

On considère n un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{xarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{xarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{xarrow -\infty} x^n = -\infty$ pour n impair et $\lim\limits_{xarrow -\infty} x^n = +\infty$ pour n pair.

II.Limite infinie en un réel

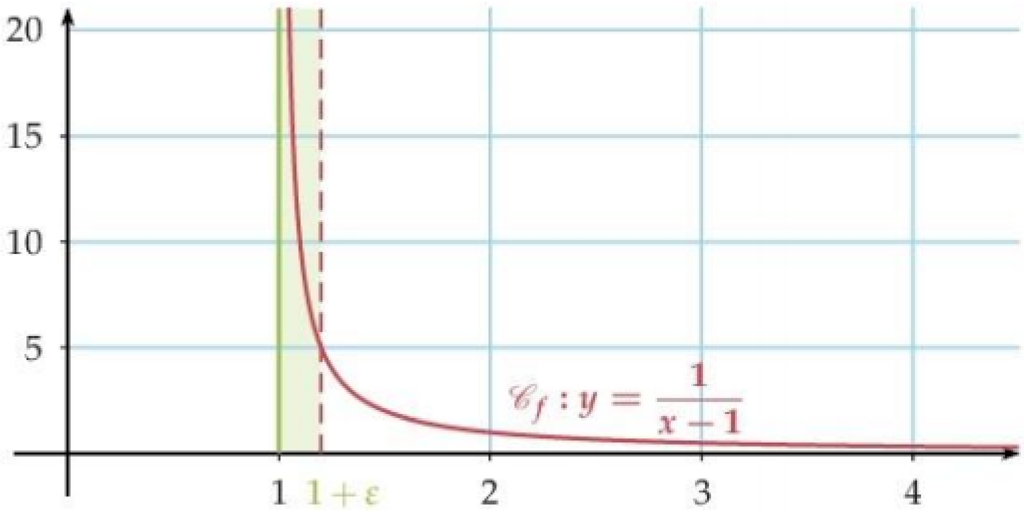
Définition :

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ du type $]x_0 - \epsilon\,; x_0[$ ou $]x_0\,; x_0 + \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$.

La fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs

de f(x) pour x assez proche de x_0.

On note alors $\lim\limits_{xarrow\, x_0} f(x) = +\infty$.



Définition : asymptote verticale.

La droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à C_f lorsque $\lim\limits_{xarrow\, x_0} f(x) = \pm\infty$.

Propriété : limite des fonctions usuelles en 0.

On considère n un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{xarrow,0^+}, \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; $\lim\limits_{xarrow,0^+}, \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{xarrow,0^-}, \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ pour n impair et $\lim\limits_{xarrow,0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ pour n pair.

III.Opérations sur les limites

Propriété : limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions.

- Limite d'une somme :

f	g	$f+g$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	???

- Limite d'un produit :

f	g	fg
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	???

- Limite d'un quotient :

f	g	f/g
ℓ	$\ell'\neq 0$	ℓ/ℓ'
$\ell\neq 0$	0	∞
ℓ	∞	0
0	0	???
∞	∞	???

IV.Limite d'une fonction composée

1.Fonction composée

Définition :

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F, et soit g une fonction définie sur F.

La composée de f suivie de g est la fonction notée gof définie sur E par $gof(x) = g[f(x)]$.

2.Théorème de composition des limites

Théorème :

Soit h la composée de la fonction f suivie de g et α, β, γ trois réels ou $\pm, \infty$.

Si $\lim_{xarrow \alpha} f(x) = \beta$ et $\lim_{xarrow \beta} f(x) = \gamma$ alors $\lim_{xarrow \alpha} h(x) = \gamma$.

V.Limites et comparaison de fonctions

1.Théorème de comparaison

Théorème :

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\ ;\ +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]-\infty\ ;\ \beta[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\ ;\ \beta[$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in]\alpha\ ;\ \beta[$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

2.Théorème d'encadrements dit des gendarmes ou du sandwich

Théorème :

Soit deux nombres réels α et l et trois fonctions f, g et h telles que pour tout $x > \alpha$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim\limits_{xarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{xarrow +\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{xarrow +\infty} g(x) = l$.

VI. Continuité d'une fonction

Propriété :

- Les fonctions usuelles (affines, carrés, racines carrées, cubes, inverses, valeur absolues) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition.
- Toute **fonction construite algébriquement** à l'aide de fonctions usuelles est continue sur tout intervalle de son domaine de définition
- On convient qu'une **flèche oblique dans un tableau de variation** traduit la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

- Un **fonction dérivable sur un intervalle est continue** sur cet intervalle.

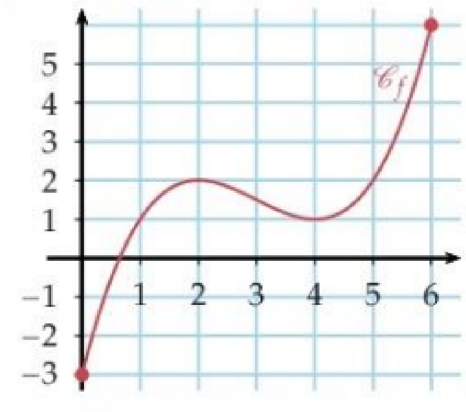
VII. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que a<b.

Si f est continue sur [a , b] alors pour tout réel k compris tel que f(a)<k<f(b), il existe au moins un réel c appartenant à [a , b] tel que f(c)=k.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 6]$ par $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



On dresse le tableau de variation de f.

x	0		2		4		6
f	-3	↗	2	↘	1	↗	6

f admet pour minimum -3 et pour maximum 6.

f est continue sur $[0\ ;\ 6]$.

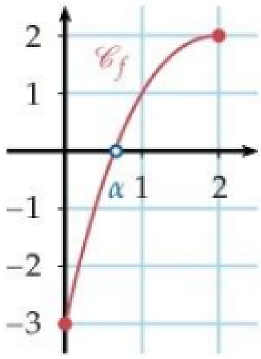
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs de $[-3\ ;\ 6]$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0\ ;\ 6]$.

Théorème : cas d'une fonction strictement monotone.

On considère f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que a<b.

Si f est continue et **strictement monotone** sur [a , b] alors pour tout réel k compris tel que f(a)<k<f(b), **il existe un unique réel c** appartenant à [a , b] tel que f(c)=k.

Reprenons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



x	0	α	2
f	-3	0	2

Sur $[0\,;\,2]$, f est continue, strictement croissante et admet pour minimum -3 et maximum 2. Donc, f prend une fois, et une seule, toutes les valeurs intermédiaires entre -3 et 2.

En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α entre 0 et 2.