

Matrices et graphes

I. La notion de matrice.

Soient m , n et p trois entiers naturels non nuls.

1. Notion de matrice et opérations.

Définition :

Une matrice de taille (ou format) $n \times p$ est un tableau de nombres réels n lignes et p colonnes.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0,5 & 4 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes donc de taille 2×3 .

Définitions :

Lorsque $n = 1$, on dit que M est une **matrice ligne**, formée d'une seule ligne.

Puis, lorsque $p = 1$, on dit que M est une **matrice colonne**, formée d'une seule colonne.

Et lorsque $n = p$, on dit que M est une **matrice carrée** d'ordre n .

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée, dont tous les termes sont nuls sauf lorsque $i=j$.

La **matrice identité** d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On la note I_n .

La matrice nulle de taille $n \times p$, notée $O_{n,p}$, est la matrice de taille $n \times p$, dont tous les coefficients sont nuls.

Exemples :

1. $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{9} & -15 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.
2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.
3. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ désignent respectivement la matrice identité et la matrice nulle d'ordre 3.

Définition :

Deux matrices A et B de taille $n \times p$ sont **égales** lorsque, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, p\}$

on a $(a_{ij}) = (b_{ij})$.

Définition :

Une matrice carrée d'ordre n sont **symétrique** lorsque, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

on a $(a_{ij}) = (a_{ji})$.

Exemple :

La matrice suivante est symétrique.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

2. Opérations sur les matrices.

Définitions :

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de taille $n \times p$.

1. La **somme des matrices A et B**, notée $A + B$, est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $n \times p$ telle que, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.
2. Le produit de la matrice A par un réel λ , noté λA , est la matrice $M = (m_{ij})$ de taille $n \times p$ telle que, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a $m_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}$.

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices de même taille et α et β deux réels.

1. $A + B = B + A$ (commutativité de la somme de matrices)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité de la somme de matrices)
3. $1 \times A = A \times 1 = A$
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Définition :

On appelle matrice opposée de A la matrice $M = (-1)A$, notée $-A$, telle que,

pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a $m_{i,j} = -a_{i,j}$.

De plus, on note $A - B$ la matrice $A + (-B)$.

Exemples :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ deux matrices de taille 2×3 .

On a $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

$2A = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$; $3B = 3 \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ -9 & -9 & -3 \end{pmatrix}$ et

$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ -9 & -9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -19 & -6 \\ 13 & 15 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition :

Soit $L = (l_{1,1}, l_{1,2}, \dots, l_{1,n})$ une matrice ligne de taille $1 \times n$ et

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{n,1} \end{pmatrix}$$

une matrice colonne de taille matrice colonne de taille $n \times 1$.

Alors le produit $L \times C$ est le nombre réel définit par :

$$L \times C = (\ell_{1,1} \ \ell_{1,2} \ \dots \ \ell_{1,n}) \times \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{n,1} \end{pmatrix} = \ell_{1,1} \times c_{1,1} + \ell_{1,2} \times c_{2,1} + \dots + \ell_{1,n} \times c_{n,1}$$

Exemple :

Si $L = (4 \ 2 \ 1)$ et $C = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, alors $L \times C = 4 \times 8 + 2 \times (-3) + 1 \times (-2) = 24$.

3.Produit de deux matrices.

Définition :

Si A est une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$, le **produit des matrices** A et B, noté $A \times B$ ou AB , est la matrice $C = (c_{i,j})$ de taille $m \times p$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$, on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} \times b_{k,j}$.

Autrement dit, l'élément $c_{i,j}$ est le produit de la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B.

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices et λ un nombre réel.

Sous réserve de définition des produits et des sommes, on a :

1. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
2. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
3. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
4. $(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda AB$
5. $I_n \times A = A \times I_n = A$

Définition :

Soient A une matrice carrée d'ordre n et k un entier naturel non nul.

La **puissance k-ième** de A, notée A^k , est la matrice $A^k = A \times A \times \dots \times A$ (k fois).

4. Inverse d'une matrice et résolution de système.

Définition :

Une matrice carrée A de taille n est **inversible** lorsqu'il existe une matrice carrée B de taille n telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

Définition :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

Le déterminant de A est le réel, noté $\det(A)$, défini par $\det(A) = ad - bc$.

Propriété :

Une matrice carrée est **inversible** si, et seulement si, son **déterminant est non nul**.

En particulier, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Propriété :

Soient A une matrice carrée de taille n et X et B deux matrices colonnes à n lignes. Si A est inversible, alors le système d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $X = A^{-1} \times B$.

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $AX = \begin{pmatrix} 6x+2y \\ -8x+5y \end{pmatrix}$ donc le système $\begin{cases} 6x+2y = 3 \\ -8x+5y = 12 \end{cases}$ peut s'écrire $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

II. Les graphes.

Définitions :

Un **graphe** est une représentation composée de **sommets** (des points) reliés par des arêtes (segments).

Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont munies d'un sens de parcours. L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, sans tenir compte de leur éventuel sens de parcours.

Exemple :

Le graphe ci-dessous est d'ordre 5.

Les sommets K et L sont de degré 3.

Les sommets M₁, M₂ et M₃ sont de degré 2.



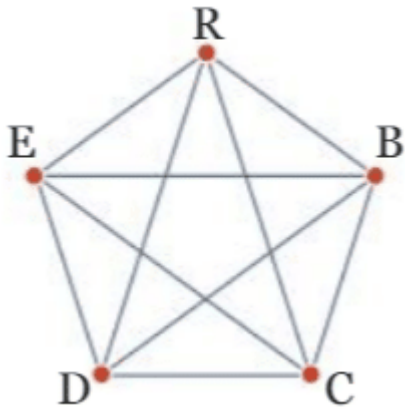
Définitions :

Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par au moins une arête.

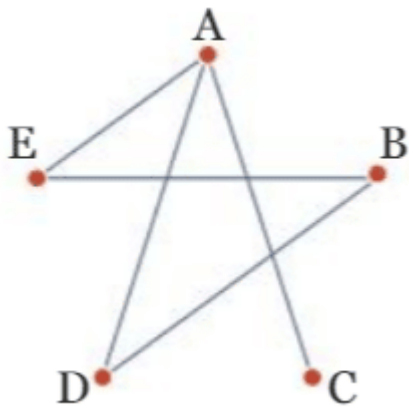
Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

Exemples :

1. Le graphe ci-dessous est complet car tous ses sommets sont deux à deux adjacents.



2. Le graphe ci-dessous n'est pas complet car les sommets A et B, par exemple, ne sont pas adjacents.

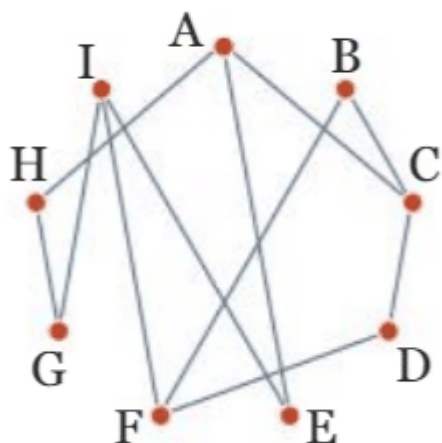


Définition :

Pour un graphe non orienté, une **chaîne** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus).

La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes la composant.

Pour un graphe orienté, un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus) en tenant compte du sens de parcours des arêtes.



III. Application du calcul matriciel aux graphes.

Définition :

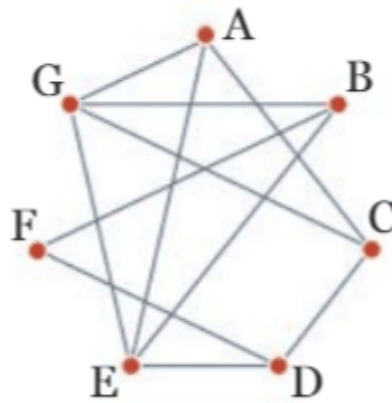
Soit n un entier naturel non nul. On considère un graphe d'ordre n (orienté ou non) dont les sommets sont numérotés de 1 à n , puis rangés dans l'ordre croissant. La **matrice d'adjacence** de ce graphe est la matrice carrée de taille n , dont le coefficient $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes partant du sommet i pour arriver au sommet j .

Exemple :

En notant M la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous obtenue en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

Nous avons :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Propriété :

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et M la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n , dont les sommets sont numérotés de 1 à n et rangés dans l'ordre croissant. Le terme de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de la matrice M^k donne le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur k reliant le sommet i au sommet j .

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, on a $M^4 =$

$$\begin{pmatrix} 23 & 20 & 13 & 20 & 16 & 5 & 23 \\ 20 & 20 & 12 & 18 & 14 & 4 & 18 \\ 13 & 12 & 22 & 6 & 27 & 12 & 17 \\ 20 & 18 & 6 & 21 & 8 & 2 & 20 \\ 16 & 14 & 27 & 8 & 35 & 17 & 24 \\ 5 & 4 & 12 & 2 & 17 & 10 & 11 \\ 23 & 18 & 17 & 20 & 24 & 11 & 31 \end{pmatrix}.$$

Il existe donc 27 chaînes de longueur 4 reliant le sommet C au sommet E.

On a $M^2 =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

donc il n'existe aucune chaîne de longueur 2 reliant le sommet B au sommet F.