

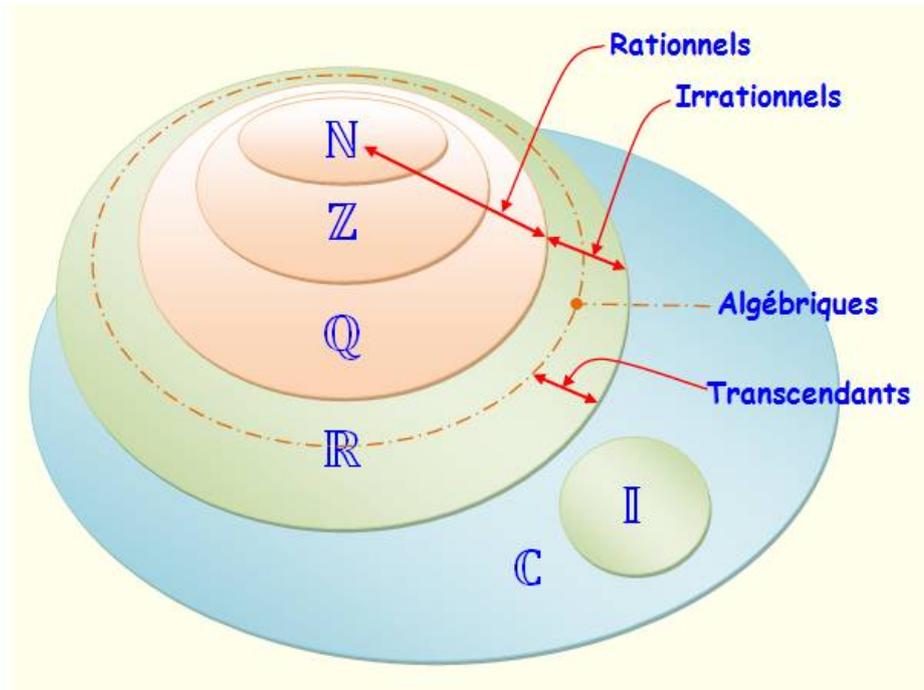
Nombres complexes

I. Forme algébrique d'un nombre complexe

Théorème et définition :

Il existe un ensemble de nombres noté \mathbb{C} , dont les éléments sont appelés les **nombres complexes**, tel que :

- \mathbb{C} contient l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels;
- les règles de calculs dans \mathbb{C} sont les mêmes que dans \mathbb{R} ;
- \mathbb{C} contient un élément noté i tel que $i^2 = -1$;
- tout nombre complexe z peut s'écrire de **manière unique** sous la forme $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels (cette écriture s'appelle l'**écriture algébrique** du nombre complexe z). Le nombre x est appelé **partie réel (notée $\text{Re}(z)$)** du nombre z et le nombre y est appelé **partie imaginaire (notée $\text{Im}(z)$)** du nombre complexe z .



Exemple :

Le nombre $z = \sqrt{3} + 2i$ est un nombre complexe.

$\sqrt{3}$ est sa partie réelle et 2 est sa partie imaginaire.

Propriétés :

- z est un nombre réel si et seulement si $\text{Im}(z)=0$.
- z est un imaginaire pur si et seulement si $\text{Re}(z)=0$.

II. Conjugué d'un nombre complexe

Définition :

On considère z un nombre complexe dont la forme algébrique est $z=x+iy$ avec x et y deux nombres réels. On appelle **conjugué du nombre z** , le nombre complexe, noté \bar{z} , tel que

$$\bar{z} = x - iy.$$

Exemple :

$$\overline{1 + 3i} = 1 - 3i \text{ et } \overline{2 - 5i} = 2 + 5i.$$

Propriétés :

On considère deux nombres complexes z et z' . Nous avons les propriétés suivantes :

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ avec $z \neq 0$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ avec $z' \neq 0$
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{(kz)} = k\bar{z}$ avec $k \in \mathbb{R}$

III. Représentation graphique des nombres complexes

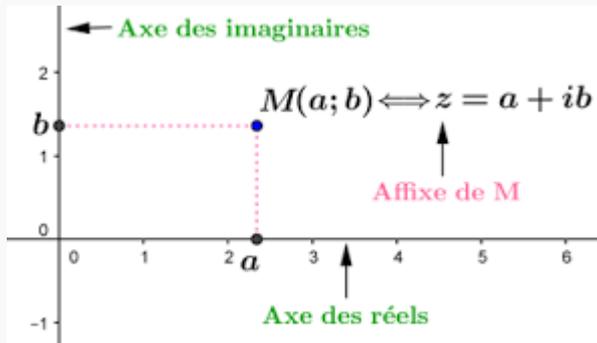
1. Affixe d'un point

Définition :

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

On associe à tout nombre complexe $z=x+iy$, on associe le point $M(x;y)$.

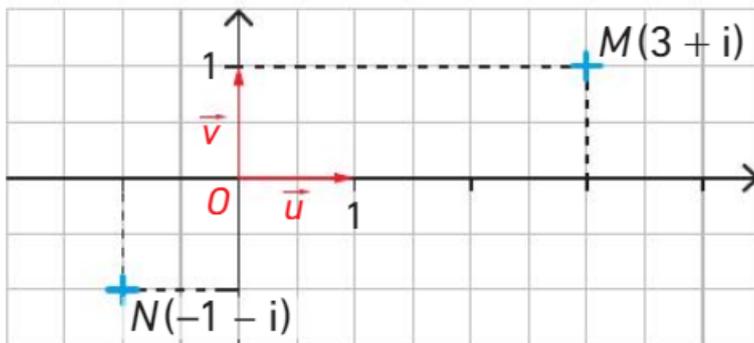
M est appelé le **point image de z** et z est appelé l'**affixe du point M** dans le repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note $M(z)$ qui se lit **le point M d'affixe z** .



Exemple :

Le point M d'affixe $z = 3 + i$ a pour coordonnées $M(3, 1)$.

Le point N d'affixe $z = -1 - i$ a pour coordonnées $M(-1, -1)$.



2. Affixe d'un vecteur

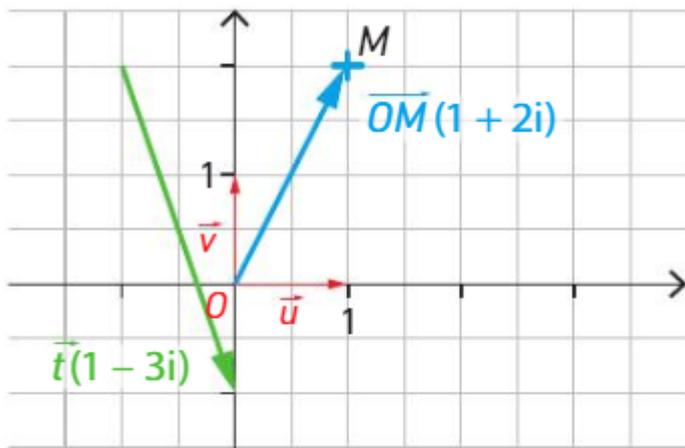
Définition :

A tout nombre complexe z affixe du point $M(x,y)$, on associe le vecteur $\vec{w} = O\vec{M}$ tel que $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. et on note $\vec{w}(z)$, le vecteur \vec{w} d'affixe z .

Exemples:

Le vecteur \vec{OM} d'affixe $z=1+2i$ a pour coordonnées $\vec{OM}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le vecteur \vec{t} d'affixe $1-3i$ a pour coordonnées $\vec{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.



Propriétés :

On considère deux vecteurs \vec{w} et \vec{w}' d'affixes respectives z et z' . Le vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$.

Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz avec $k \in \mathbb{R}$.

3. Les équations du second degré dans \mathbb{C}

Propriété :

On considère un nombre réel a .

- Si $a > 0$, les solutions sont $z = \sqrt{a}$ et $z = -\sqrt{a}$;
- Si $a < 0$, les solutions sont $z = i\sqrt{-a}$ et $z = -i\sqrt{-a}$;

- Si $a=0$, la solution est $z=0$.

Exemple :

L'équation $z^2 = -4$ admet comme solutions dans \mathbb{C} : $z = 2i$ et $z = -2i$.

4. Les équations du type $az^2 + bz + c = 0$

Propriété :

On considère des nombres réels a, b et c avec $a \neq 0$. On considère dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, les solutions sont $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, les solutions sont $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, la solution est $z = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple :

Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $z^2 + 4z + 5 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 + i\sqrt{4}}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$$

$$\text{et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 - i\sqrt{4}}{2} = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i.$$

5. Factorisation d'un trinôme du second degré

Propriété:

On considère des nombres réels a, b et c avec $a \neq 0$. Pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = az^2 + bz + c$.

On note z_1 et z_2 les deux solutions de $P(z) = 0$ dans \mathbb{C} (avec éventuellement $z_1 = z_2$ lorsque $\Delta = 0$).

On a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent, $P(z) = z^2 + 4z + 5 = (z + 2 - i)(z + 2 + i)$.