

Position relative de deux courbes

Ce qu'évalue le contrôle : position relative de deux courbes

L'essentiel du sujet

- Niveau **première**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **interdite**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Variations d'une fonction (4 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Lire graphiquement les points d'intersection et la position relative de deux courbes
- Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour déterminer la position relative de deux courbes
- Démontrer une inégalité en étudiant les variations d'une fonction et son minimum
- Étudier un bénéfice à l'aide de la dérivée pour trouver une production optimale

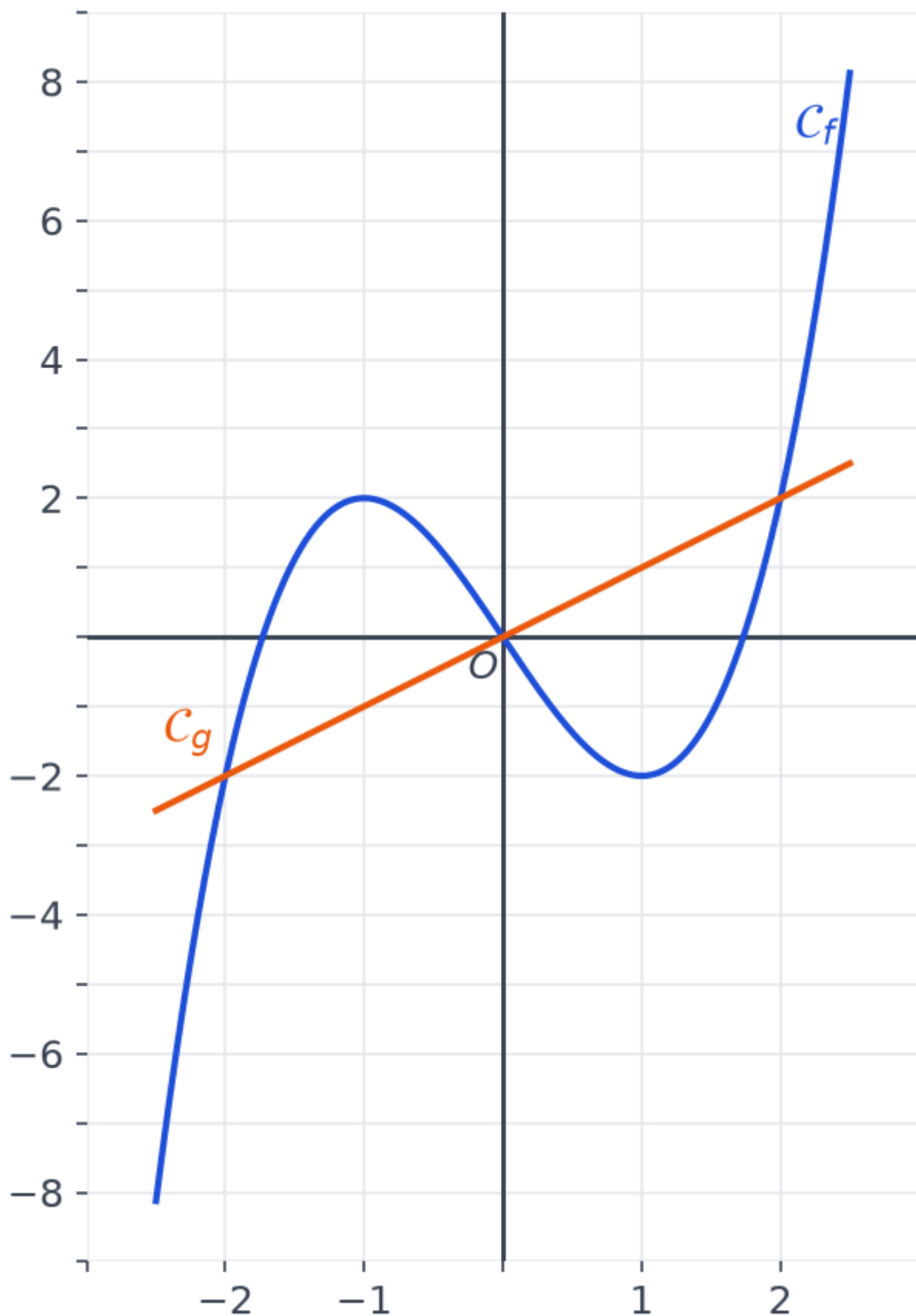
Avant de commencer

Pour chaque question de position, ramène-toi toujours au **signe de la différence** des deux expressions, puis factorise-la avant de dresser le tableau. Dans l'exercice 3, ne t'arrête pas aux variations : c'est la **valeur du minimum** qui permet de conclure. Dans le problème, garde en tête les unités, car x compte des dizaines de vélos. Enfin, vérifie chaque factorisation en la redéveloppant, par exemple sur une valeur simple de x .

Le sujet du contrôle : position relative de deux courbes

Exercice 1 - Lecture graphique de deux courbes (3 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $[-2,5;2,5]$ par $f(x) = x^3 - 3x$ et $g(x) = x$.
Leurs courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont tracées ci-dessous.



1. Lis d'abord les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g . (1 point)
2. Résous ensuite graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sur $[-2,5;2,5]$. (1 point)

3. Démontre enfin que $f(x)-g(x)=x(x-2)(x+2)$, puis explique comment cette écriture confirme tes lectures. (1 point)

Exercice 2 - Une parabole et une droite (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x-1$, de courbe $\mathcal{C}_f$, et $\mathcal{D}_g$ la droite d'équation $y=x+3$. On veut étudier leur position relative, cette fois sans graphique.

1. Calcule $f(x)-(x+3)$, puis détermine les racines de ce polynôme du second degré. (1,5 point)
2. Dresse ensuite le tableau de signes de $f(x)-(x+3)$ sur $\mathbb{R}$ et déduis-en la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{D}_g$. (1,5 point)
3. Donne alors les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{D}_g$. (1 point)

Exercice 3 - Une inégalité démontrée par une étude de fonction (5 points)

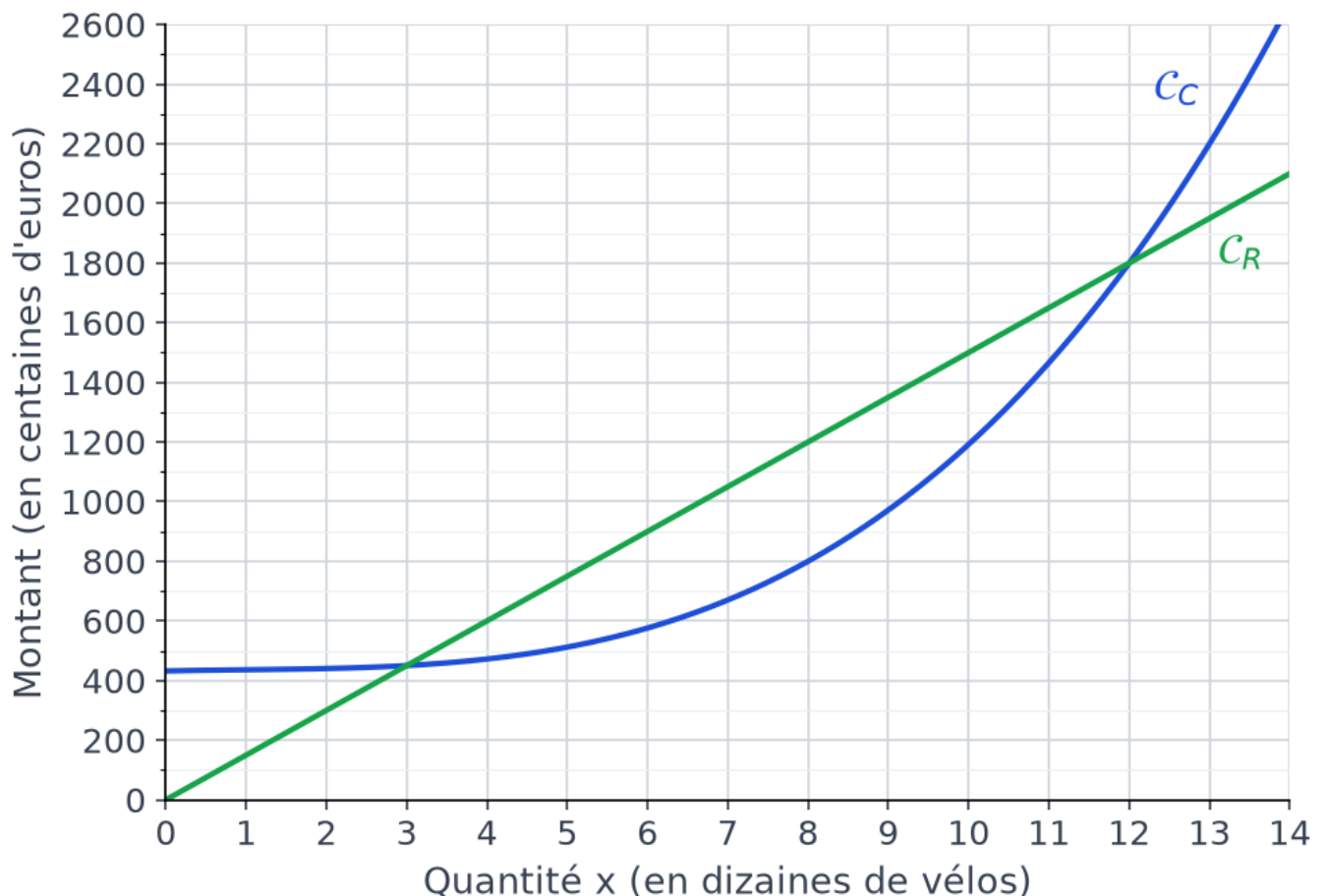
On veut démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, on a $x^3 \geq 3x-2$. Pour cela, on définit sur $[0; +\infty[$ la fonction h par $h(x)=x^3-3x+2$.

1. Calcule $h'(x)$, puis montre que $h'(x)=3(x-1)(x+1)$. (1 point)
2. Étudie le signe de $h'(x)$ sur $[0; +\infty[$ et dresse le tableau de variations de h , en précisant $h(0)$ et $h(1)$. (1,5 point)
3. Déduis-en le signe de $h(x)$ sur $[0; +\infty[$, puis conclus. (1,5 point)
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction cube. Détermine l'équation de sa tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 1, puis interprète graphiquement l'inégalité démontrée. (1 point)

Exercice 4 - La fabrique de vélos (8 points)

Un atelier fabrique chaque mois x dizaines de vélos, avec $x \in [0;14]$. Tous les vélos fabriqués sont vendus. Le coût total de fabrication, en centaines d'euros, est donné par

$C(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 432$. De plus, chaque dizaine de vélos est vendue 150 centaines d'euros, donc la recette vaut $R(x) = 150x$.



1. Par lecture graphique, donne les quantités pour lesquelles la courbe de la recette est au-dessus de celle du coût. (1 point)
2. On note $B(x) = R(x) - C(x)$ le bénéfice. Montre que $B(x) = -x^3 + 3x^2 + 144x - 432$. (1 point)
3. Vérifie que, pour tout x , $B(x) = (x-3)(12-x)(x+12)$. (1 point)
4. Étudie alors le signe de $B(x)$ sur $[0;14]$. Quelle est la position relative des deux courbes, et pour quelles quantités l'atelier est-il rentable ? (1,5 point)
5. Calcule $B'(x)$, puis vérifie que $B'(x) = -3(x-8)(x+6)$. (1 point)
6. Dresse le tableau de variations de B sur $[0;14]$, avec les valeurs aux bornes et à

l'extremum. (1,5 point)

7. Combien de vélos l'atelier doit-il fabriquer par mois pour un bénéfice maximal ? Donne ce bénéfice en euros. (1 point)



Réviser position relative de deux courbes avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, entraîne-toi sur la fiche fonctions usuelles avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en première** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Variations et extremums d'une fonction : contrôle de maths en première
- Dérivées et approximation affine : contrôle de maths en première
- Propriétés de l'exponentielle : contrôle de maths en première