

# Positions relatives de droites et plans de l'espace

## I. Repérage sur la sphère terrestre

### 1. La sphère terrestre

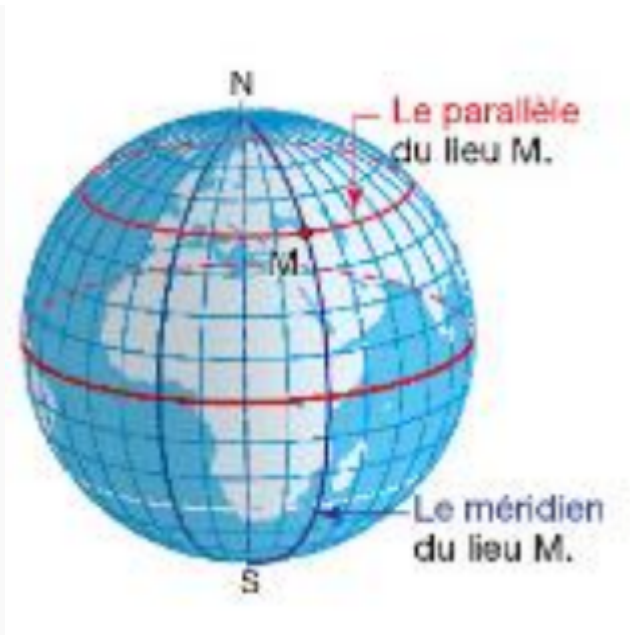
#### Définition :

La sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  est formée des points  $M$  de l'espace tels que  $OM=R$ . On assimile la terre à une sphère de rayon 6 400 km et de centre  $O$ . Les points  $N$  et  $S$  représentent respectivement le pôle nord et le pôle sud.

#### Définitions :

$M$  est un point de la sphère terrestre distinct des pôles  $N$  et  $S$ . Le méridien du lieu  $M$  est le demi-cercle de diamètre  $[NS]$  passant par  $M$ .

Le parallèle du lieu  $M$  est le cercle section de la sphère par le plan passant par  $M$  et perpendiculaire à la droite  $(NS)$ .



L'équateur est le seul parallèle qui est un grand cercle (de centre O) de la sphère.

## 2. Repérage sur la sphère terrestre

### Définition :

Le méridien origine de la sphère terrestre est le **méridien de Greenwich** (banlieue de Londres) en Angleterre.

### Définitions :

M est un plan de la sphère distinct des pôles N et S. Le méridien de M coupe l'équateur en P et le méridien de Greenwich coupe l'équateur en A.

- La **longitude** du lieu M est la mesure, en degrés, de l'angle  $\widehat{AOP}$  suivie de l'indication ouest(O) ou est (E).
- La **latitude** du lieu M est la mesure, en degrés, de l'angle  $\widehat{POM}$  suivie de l'indication nord (N) ou sud (S).

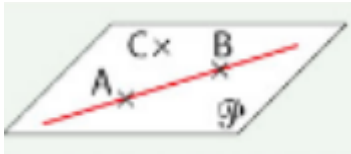


## II. Positions relatives de droites et plans

### 1. Règle d'incidence.

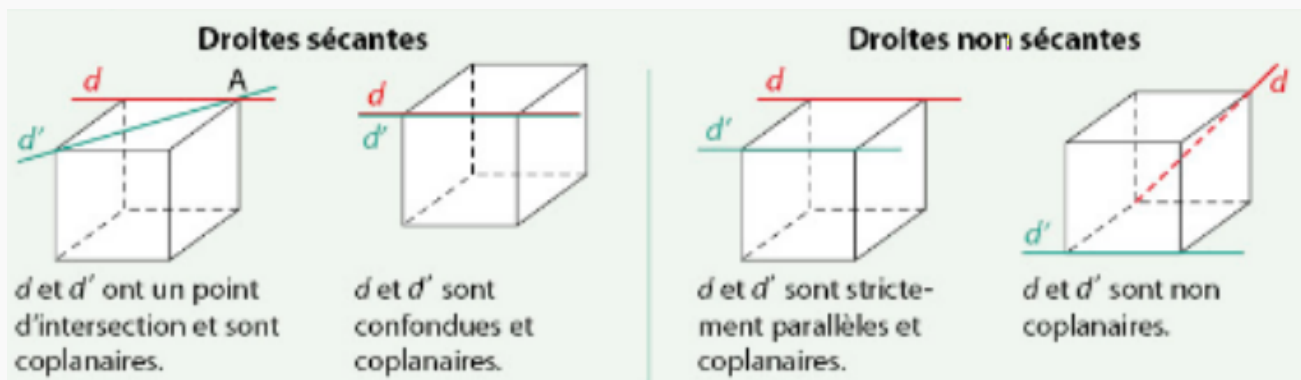
Règle :

- Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite;
- Par trois points non alignés A,B et C de l'espace, il passe un unique plan noté (ABC);
- Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un plan P, alors tout point de la droite (AB) appartient au plan P. On dit que la droite (AB) est contenue dans le plan P et on note  $(AB) \subset P$ .
- Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane.



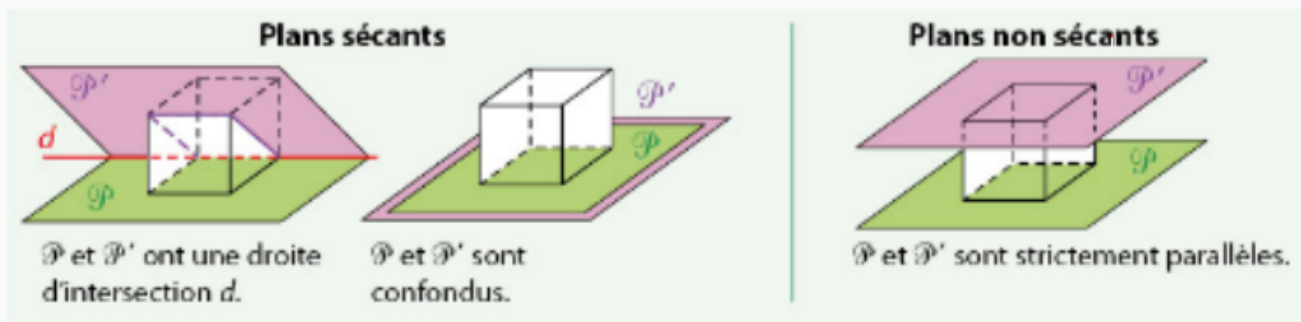
## 2. Les positions relatives.

### Position relative de deux droites :

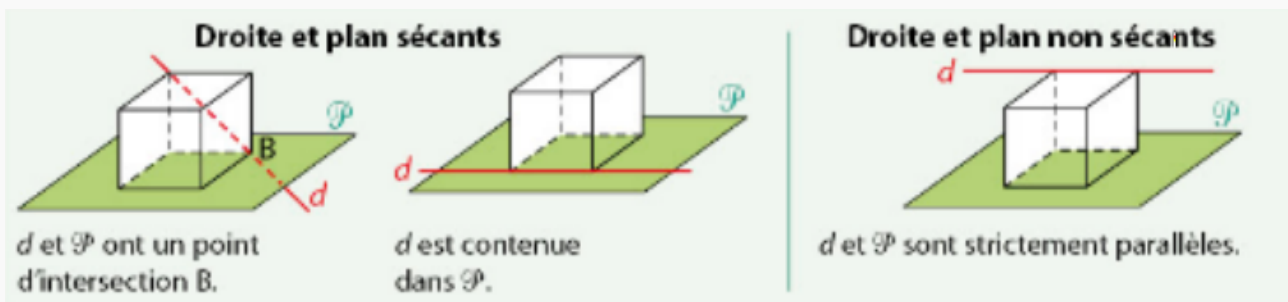


- Deux droites sont **coplanaires** lorsqu'elles sont contenues dans un même plan:
- Deux droites sont **strictement parallèles** lorsqu'elles sont **coplanaires et non sécantes**.

### Position relative de deux plans :



### Position relative d'une droite et d'un plan :



### III. Droites et plans parallèles

#### 1.Parallélisme entre droites

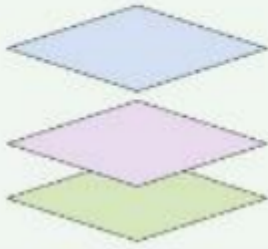
Propriétés :

- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles;
- Si deux droites sont parallèles , alors tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre.

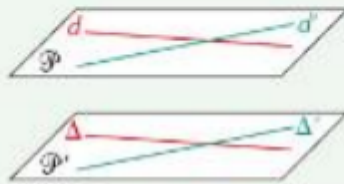
#### 2.Parallélisme entre plans

Propriété :

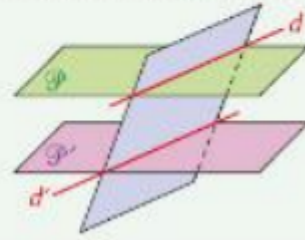
• Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles entre eux.



• Si deux droites sécantes d'un plan  $\mathcal{P}$  sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan  $\mathcal{P}'$ , alors  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles.



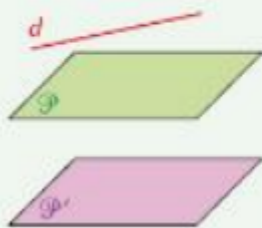
• Si deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un, coupe l'autre et leurs droites d'intersection sont parallèles.



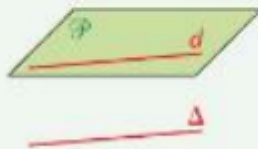
### 3.Parallélisme entre droites et plans

**Propriété :**

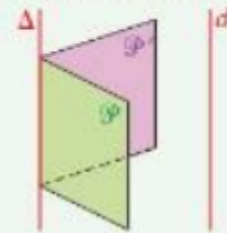
• Si deux plans sont parallèles et si une droite est parallèle à l'un, alors elle est parallèle à l'autre.



• Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.



• Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur intersection.



Autre version de cette leçon

## I. Perspective cavalière

Dans une représentation d'un solide en perspective cavalière :

- une figure représentée dans un plan vu de face est représentée en vraie grandeur, sans changer sa forme ;
- deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles ;
- des points alignés sont représentés par des points alignés ;
- le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné ;

- les éléments visibles sont en traits pleins, ceux qui sont cachés sont en pointillés ;
- une droite perpendiculaire au plan frontal est représentée par une droite faisant un angle aigu avec l'horizontale du support de représentation ;
- toute longueur sur une telle droite est multipliée par un coefficient inférieur à 1.

## II. Positions relatives de droites et de plans

---

### 1. Règles d'incidence

---

#### Règles :

---

1. Par deux points distincts il passe une unique droite ;
2. Par trois points non alignés A, B, C, il passe un unique plan noté (ABC) ;
3. Si un plan contient deux points A et B, alors il contient tous les points de la droite (AB) ;
4. Si (d) est une droite et A un point non situé sur (d), il existe un unique plan contenant (d) et A.

### 2. Positions relatives de deux droites

---

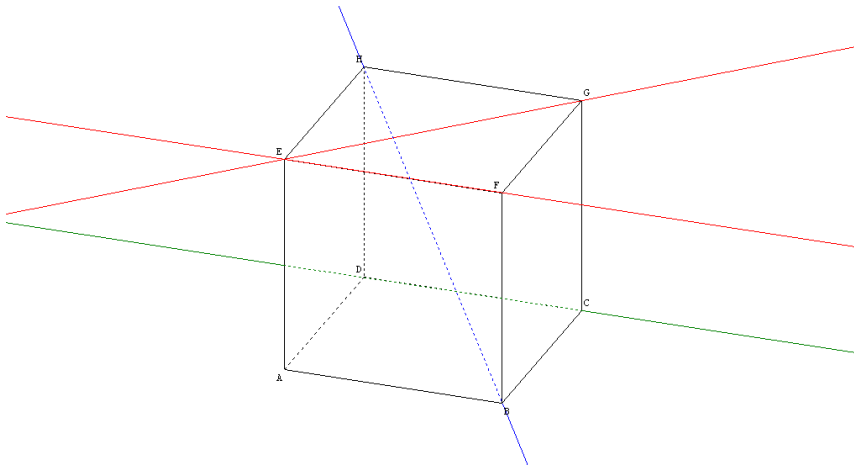
#### Propriété :

---

Deux droites peuvent être :

- Coplanaires : elles sont situées dans un même plan (elles sont alors sécantes ou parallèles)

- Non coplanaires : et dans ce cas elles n'ont aucun point en commun.



### 3.Positions relatives d'une droite et d'un plan

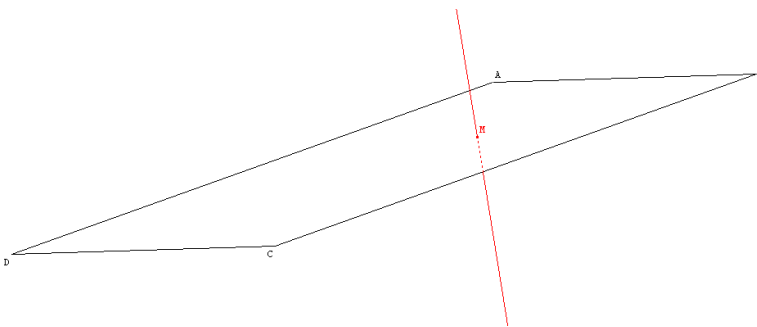
---

#### Propriété :

---

Une droite peut être :

- Contenue dans un plan si elle passe par deux points du plan ;
- Sécante au plan, si elle n'a qu'un seul point commun avec ce plan (voir ci-contre) ;
- Parallèle au plan si elle n'a aucun point commun avec le plan.



### 4.Position relatives de deux plans

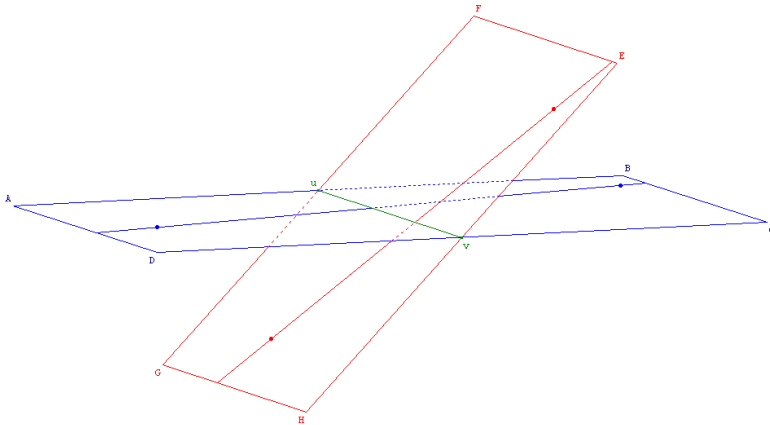
---

### Propriété :

---

Deux plans sont soit parallèles, s'ils n'ont aucun point en commun, soit sécants et dans ce cas leur intersection est une droite (ils ont donc une infinité de points d'intersection).

### Exemple de plans sécants, selon la droite (UV).



## III- Parallélisme dans l'espace

---

### 1.Parallélisme entre des droites

---

#### Propriétés :

---

- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont parallèles alors tout plan qui coupe l'une coupe aussi l'autre.

### 2.Parallélisme entre deux plans

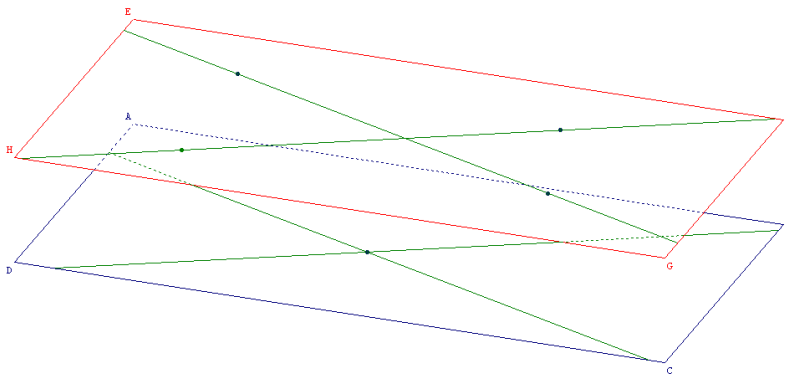
---

## Propriétés :

---

- Si deux plans sont parallèles alors tout plan parallèle à l'un est aussi parallèle à l'autre.
- Si deux droites sécantes  $(d)$  et  $(d')$  du plan  $(P)$  sont parallèles à deux droites sécantes et du plan  $(P')$  alors les deux plans  $(P)$  et  $(P')$  sont parallèles.
- Si deux plans  $(P)$  et  $(P')$  sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe aussi l'autre et les droites d'intersection  $(d)$  et  $(d')$  sont parallèles.

### Exemple de plans parallèles déterminés par deux paires de droites sécantes.



## 2.Parallélisme entre droites et plans

---

### Propriétés :

---

- Si deux plans sont parallèles et si une droite est parallèle au premier plan alors elle est aussi parallèle au second.
- Si la droite  $(d)$  est parallèle au plan  $(P)$  alors tout plan contenant  $(d)$  et sécant à  $(P)$  le coupe selon une droite parallèle à  $(d)$ . Démonstration
- Si la droite  $(d)$  est parallèle à une droite du plan  $(P)$  alors  $(d)$  est parallèle au plan  $(P)$ . Démonstration
- Si les plans  $(P)$  et  $(P')$  sont sécants selon la droite et si  $(d)$  est une droite parallèle aux

deux plans (P) et (P') alors les droites et (d) sont parallèles.

## IV. Calculs en géométrie dans l'espace

---

### 1. Orthogonalité entre droite et plan

---

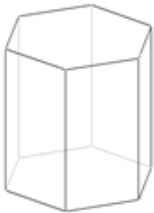
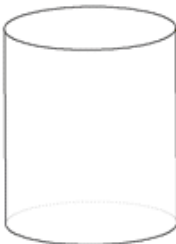
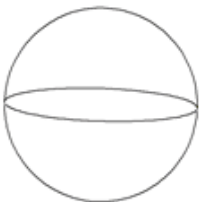
#### Propriété :

---

- Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

### 2. Aires et volumes des solides classiques

---

| Prisme droit                                                                        | Pyramide                                                                            | Cylindre                                                                            | Cône                                                                                 | Sphère                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |  |
| $V = A_{\text{base}} \times \text{hauteur}$                                         | $V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{hauteur}$                             | $V = \pi R^2 h$                                                                     | $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$                                                          | $V = \frac{4}{3} \pi R^3$<br>$S = 4\pi R^2$                                           |