

Primitives et calcul intégral

Ce qu'évalue le contrôle : primitives et calcul intégral

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **2 heures**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitres : Primitives et équations différentielles et Calcul intégral (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Déterminer des primitives des fonctions usuelles et des formes $u'e^u$, u'/u et u'/u^2
- Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b$ avec une condition initiale et étudier sa solution
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ou d'une intégration par parties
- Calculer l'aire d'un domaine compris entre deux courbes et la valeur moyenne d'une fonction
- Interpréter une intégrale de vitesse comme une distance parcourue

Avant de commencer

Pour chaque primitive, **dérive ton résultat au brouillon** : c'est la vérification la plus rapide. Dans une intégration par parties, choisis pour u le facteur qui se simplifie en le dérivant, comme x ou $\ln x$. Pour une aire, étudie d'abord la **position relative des courbes**, car

l'intégrale doit porter sur une fonction positive. Enfin, garde les unités du problème jusqu'à la phrase-réponse.

Le sujet du contrôle : primitives et calcul intégral

Exercice 1 - Primitives et première intégrale (3 points)

Dans les questions a) à c), détermine une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué, puis vérifie-la en la dérivant.

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. (0,5 point)

2. $g(x) = 2xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$. (0,5 point)

3. $h(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$. (1 point)

4. Calcule ensuite la valeur exacte de $I = \int_0^1 (2x + e^x) dx$. (1 point)

Exercice 2 - Une équation différentielle (3 points)

On considère l'équation différentielle $(E): y' = -2y + 6$, où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Détermine d'abord la solution constante de (E) . (0,5 point)

2. Donne alors l'ensemble des solutions de (E) . (1 point)

3. Trouve ensuite la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$. (0,5 point)

4. Étudie le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$, puis sa limite en $+\infty$. (1 point)

Exercice 3 - Deux intégrations par parties (4 points)

Précise à chaque fois les fonctions u et v choisies, car leur choix fait partie de la réponse.

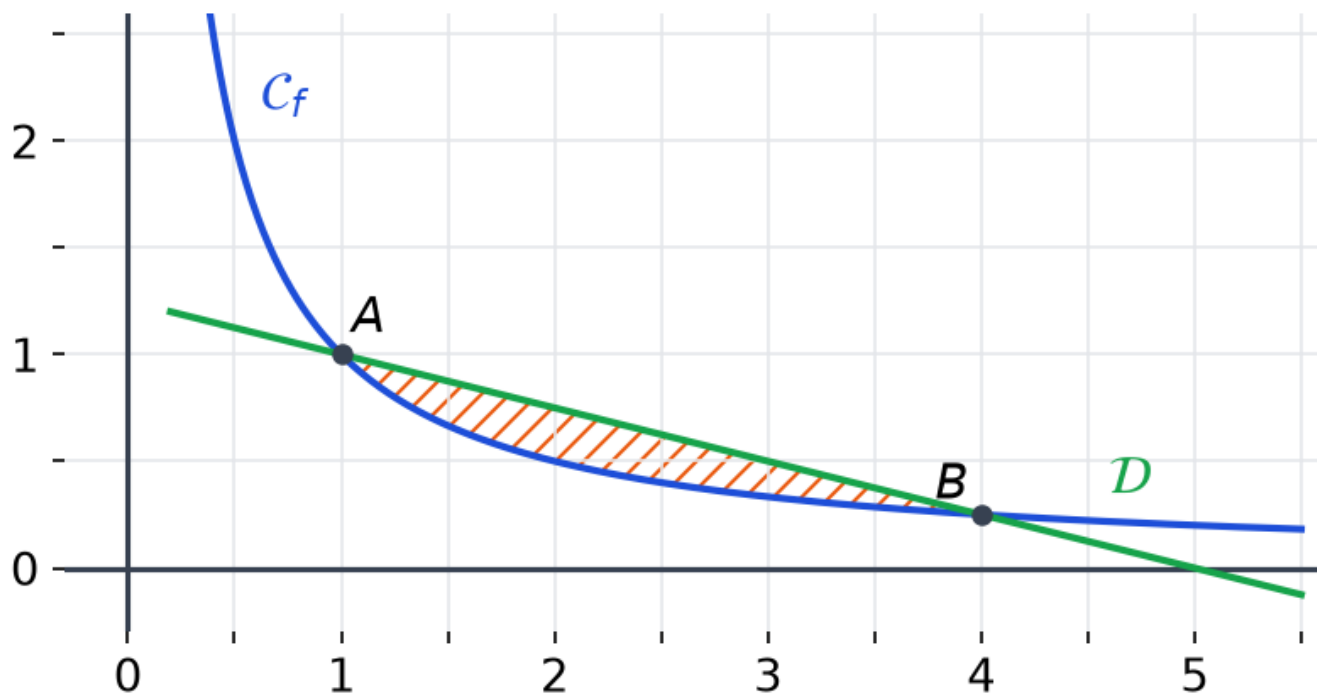
1. Calcule $J = \int_0^1 x e^x dx$. (1,5 point)

2. Montre que $K = \int_1^e \ln x dx = 1$, en écrivant $\ln x = 1 \times \ln x$. (1,5 point)

3. Déduis-en la valeur moyenne de la fonction $\ln$ sur $[1; e]$, exacte puis arrondie au centième. (1 point)

Exercice 4 - L'aire entre une hyperbole et une droite (4 points)

Dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{5}{4} - x$. Elles se coupent en A et B . On cherche l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré.

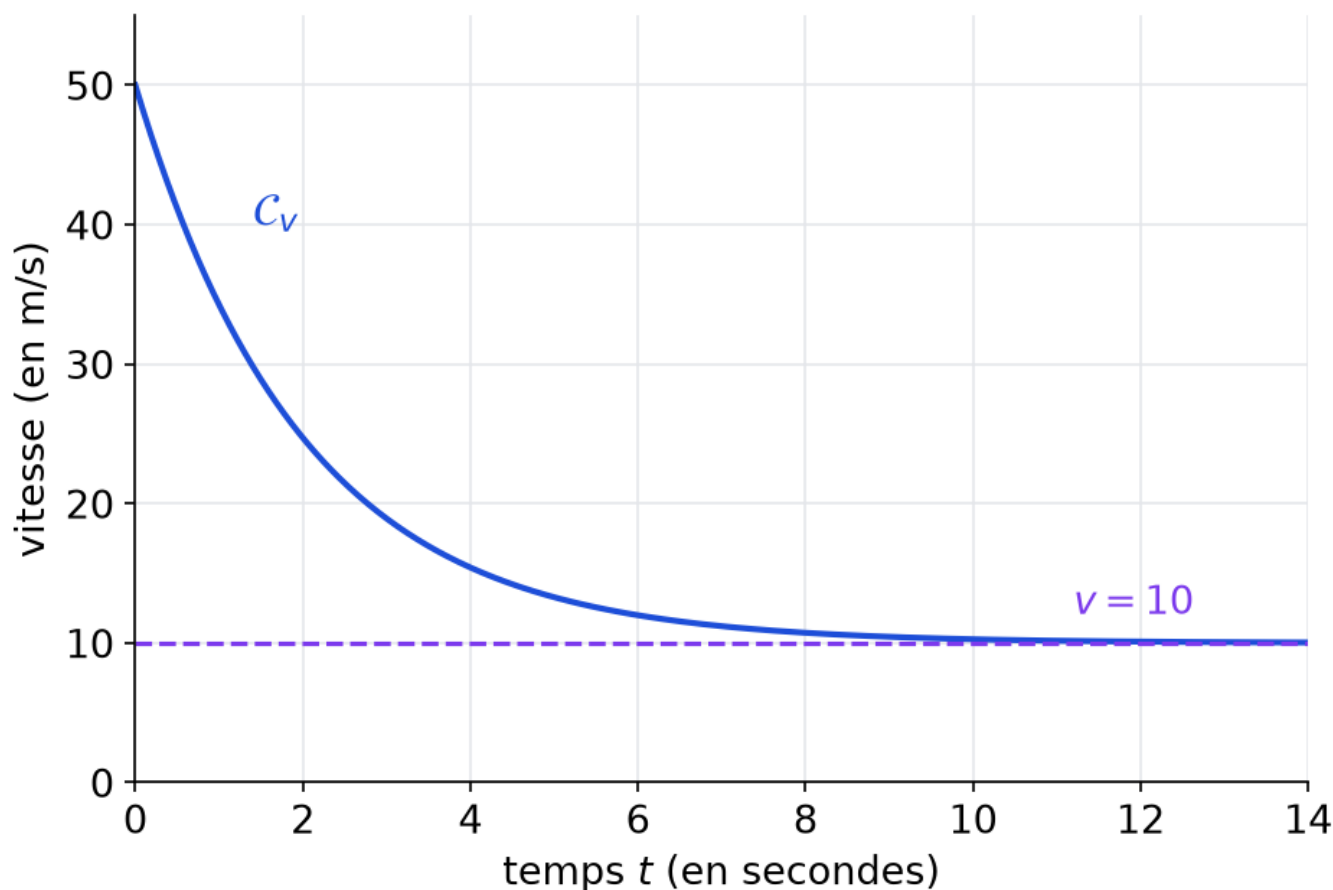


1. Résous l'équation $\frac{1}{x} = \frac{5-x}{4}$ sur $]0; +\infty[$, puis donne les coordonnées de A et de B . (1 point)
2. Vérifie que, pour $x > 0$, $\frac{5-x}{4} - \frac{1}{x} = \frac{-(x-1)(x-4)}{4x}$.
Déduis-en la position de D par rapport à C_f sur $[1; 4]$. (1 point)
3. Calcule la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unités d'aire. (1,5 point)
4. Convertis enfin cette aire en cm^2 , arrondie au centième. (0,5 point)

Exercice 5 - La descente d'un parachutiste (6 points)

Une parachutiste ouvre sa voile à l'instant $t = 0$, alors qu'elle descend à 50 m/s. Ensuite, sa vitesse $v(t)$, en m/s, vérifie l'équation différentielle $v'(t) = -0,5v(t) + 5$, où t est en secondes. On admet que, pour tout $t \geq 0$:

$$v(t) = 10 + 40e^{-0,5t}$$



1. Vérifie que v est bien solution de l'équation différentielle et que $v(0) = 50$. (1 point)
2. Étudie les variations de v et sa limite en $+\infty$. Quelle est la vitesse limite de la parachutiste ? (1 point)
3. À partir de quel instant sa vitesse devient-elle inférieure à 12 m/s ? Donne la valeur exacte, puis un arrondi au dixième de seconde. (1 point)
4. La distance parcourue entre les instants 0 et 10 est $d = \int_0^{10} v(t) dt$. Détermine une primitive de v , puis calcule d au décimètre près. (2 points)
5. Dédus-en sa vitesse moyenne sur les dix premières secondes, puis compare-la à la moyenne de $v(0)$ et $v(10)$. (1 point)



Réviser primitives et calcul intégral avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon intégrale ; entraîne-toi sur la fiche les intégrales avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Primitives de fonctions usuelles : contrôle de maths en terminale
- Équations différentielles : contrôle de maths en terminale
- Calcul d'intégrales : contrôle de maths en terminale
- Intégrales et calcul d'aires : contrôle de maths en terminale