Produit scalaire dans l'espace

I. Le produit scalaire dans l'espace

1.Approche géométrique du produit scalaire

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A,B,C trois points tels que $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{AC}$.Il existe au moins un plan P contenant les point A, B et C.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC}$ calculé dans le plan P.

Ainsi :

Si u et v sont non nuls,

$\vec{u}.\vec{v}=AB\times\ AC\times\ cos(\widehat{BAC})$;

Si u=0 ou v=0, le produit scalaire de u et v est nul : $\vec{u}.\vec{0}=0$ et $\vec{0}.\vec{v}=0$.

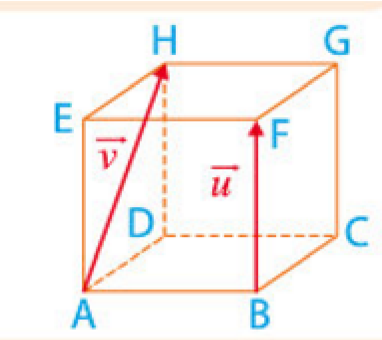
Exemple :

ABCDEFGH est un cube d'arête a.

Soit $\vec{u}=\vec{BF}$ et $\vec{v}=\vec{AH}=\vec{BG}$.

$\vec{u}.\vec{v}=\vec{BF}.\vec{AH}=\vec{BF}.\vec{BG}=BF\times\ BG\times\ cos(\widehat{FBG})$

donc $\vec{u}.\vec{v}=a\times\ a\sqrt{2}\times\ cos(\frac{\pi}{4})=a\times\ a\sqrt{2}\times\ \frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$



Propriété:

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$, alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH} = \vec{AK}.\vec{AC}$

où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et K est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) .

Si $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel alors :

- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

2.Caractérisation vectorielle de l'orthogonalité

Définition :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si, et seulement s'ils dirigent des droites orthogonales. Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

3.Expression analytique du produit scalaire

Propriété :

Dans un repère orthonormé (O, i, j, k) de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z'),Nous avons $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

En particuliers, $\vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

II. Applications du produit scalaire

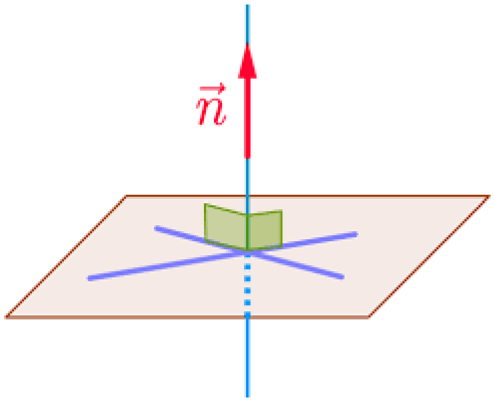
1.Vecteur normal à un plan

Définition :

Un vecteur $\vec{n}$ non nul est dit orthogonal à un plan si ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan. Ce vecteur est alors appelé **vecteur normal** au plan.

Théorème :

Une droite (d) est orthogonale à toute droite d'un plan P si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan.



2.Equation cartésienne d'un plan

Propriété :

Soit un vecteur $\vec{n}$ non nul et A un point de l'espace. L'unique plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$\vec{AM}.\vec{n} = 0$.

Propriété :

Dans un repère orthonormé, un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.Réciproquement, si a, b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble (E) des points M(x, y, z) tels que

$ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.