

Produit scalaire et calculs d'angles

Ce qu'évalue le contrôle : produit scalaire et calculs d'angles

L'essentiel du sujet

- Niveau **première**
- Durée **1 heure 30 minutes**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Produit scalaire (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Calculer un produit scalaire avec les normes et le cosinus de l'angle formé par deux vecteurs
- Utiliser le projeté orthogonal d'un point pour obtenir un produit scalaire dans une figure
- Calculer un produit scalaire à partir des coordonnées dans un repère orthonormé
- Développer un produit scalaire et exploiter la norme d'une somme de vecteurs
- Déterminer la mesure d'un angle géométrique à partir d'un produit scalaire

Avant de commencer

Commence par l'exercice 1 : ses quatre calculs courts te rappellent les formules utiles pour la suite. Avant chaque calcul, demande-toi **quelle expression convient** : une figure codée

appelle souvent le projeté orthogonal, tandis que des coordonnées appellent la formule $xx' + yy'$. Surveille aussi le **signe** : deux vecteurs de sens contraires donnent un produit négatif. Enfin, vérifie qu'un cosinus reste entre -1 et 1 et que la calculatrice est bien réglée **en degrés**.

Le sujet du contrôle : produit scalaire et calculs d'angles

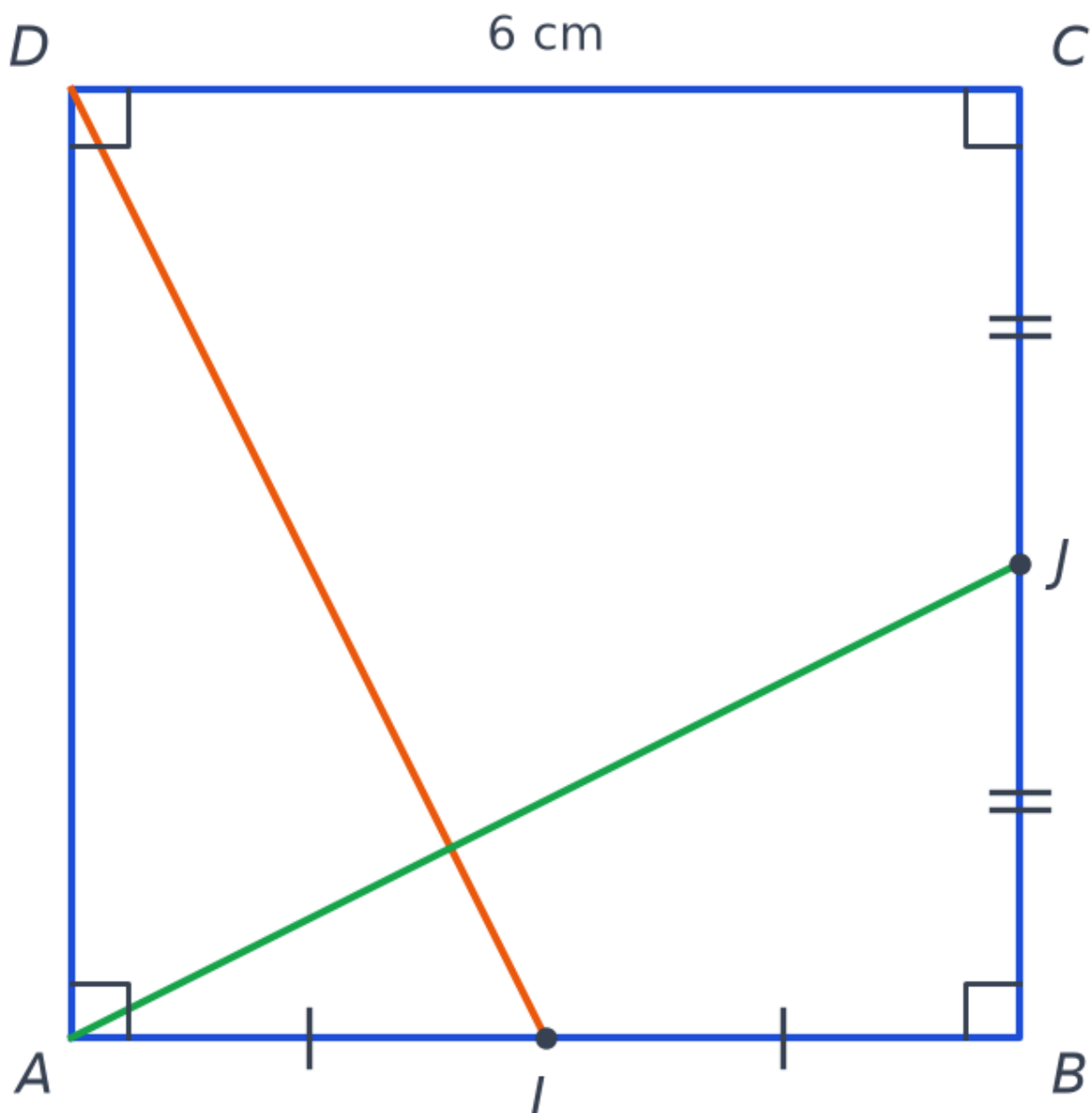
Exercice 1 - Automatismes sur le produit scalaire (4 points)

Les quatre questions sont indépendantes. Le plan est muni d'un repère orthonormé, donc les formules avec les coordonnées s'appliquent.

1. On sait que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ et que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ radian. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$. (1 point)
2. Soit $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(5; 4)$. Donne la valeur de $\vec{u} \cdot \vec{v}$. (1 point)
3. Soit $\vec{u}(4; -6)$ et $\vec{v}(3; k)$, où k est un réel. Trouve k pour que ces deux vecteurs soient orthogonaux. (1 point)
4. On a maintenant $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$. Déduis-en une mesure en radians de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. (1 point)

Exercice 2 - Le carré et ses milieux (4 points)

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm. Le point I est le milieu de $[AB]$ et le point J est le milieu de $[BC]$. On trace ensuite les segments $[DI]$ et $[AJ]$.

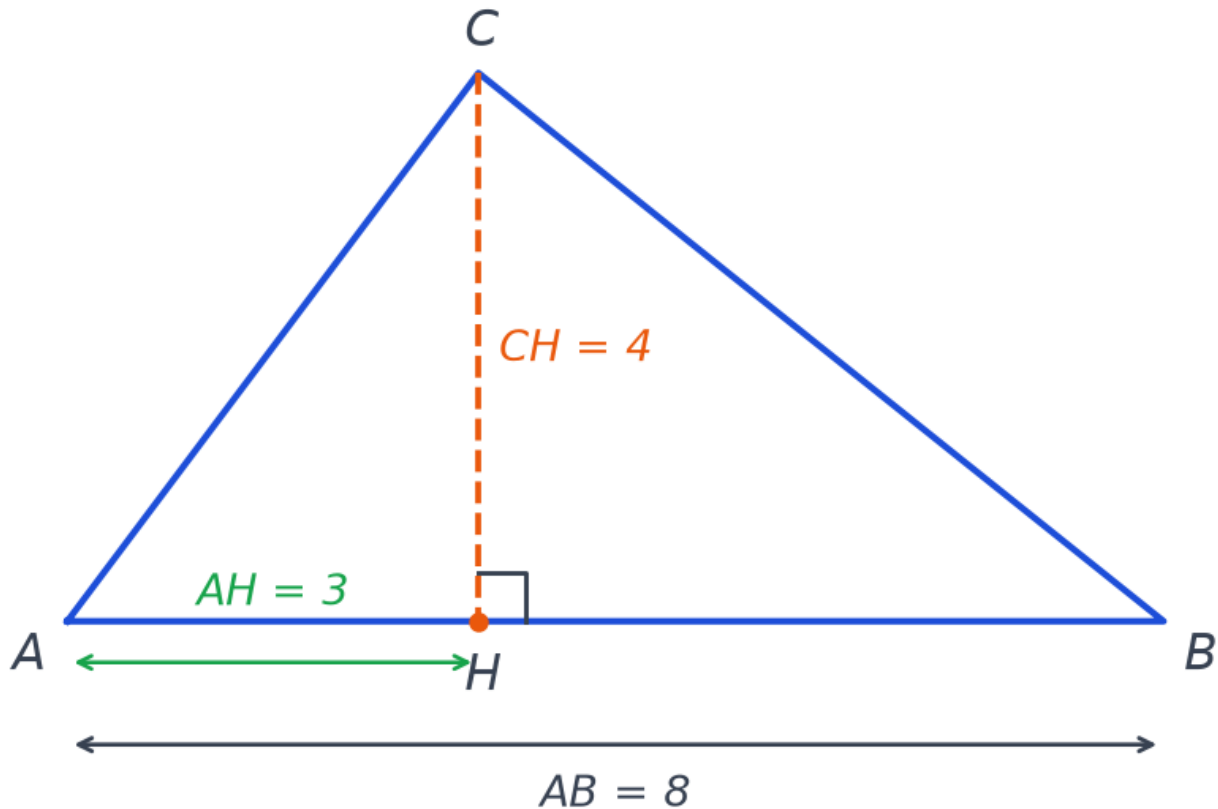


La figure n'est pas à l'échelle.

1. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant un projeté orthogonal. (1 point)
2. Détermine $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, puis justifie le signe obtenu. (1 point)
3. Calcule $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$. (1 point)
4. Écris $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$, puis développe $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AJ}$. Que peux-tu alors dire des droites (DI) et (AJ) ? (1 point)

Exercice 3 - Le triangle et son projeté orthogonal (4 points)

Dans le triangle ABC ci-dessous, H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et il appartient au segment $[AB]$. De plus, on donne $AB = 8$, $AH = 3$ et $CH = 4$ (en centimètres).



1. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. (1 point)
2. Dédus-en aussi $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en calculant d'abord la longueur BH . (1 point)
3. Calcule AC , puis donne une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré. (1 point)
4. Trouve de même la valeur exacte de BC , puis une mesure de $\widehat{ABC}$ arrondie au dixième de degré. (1 point)

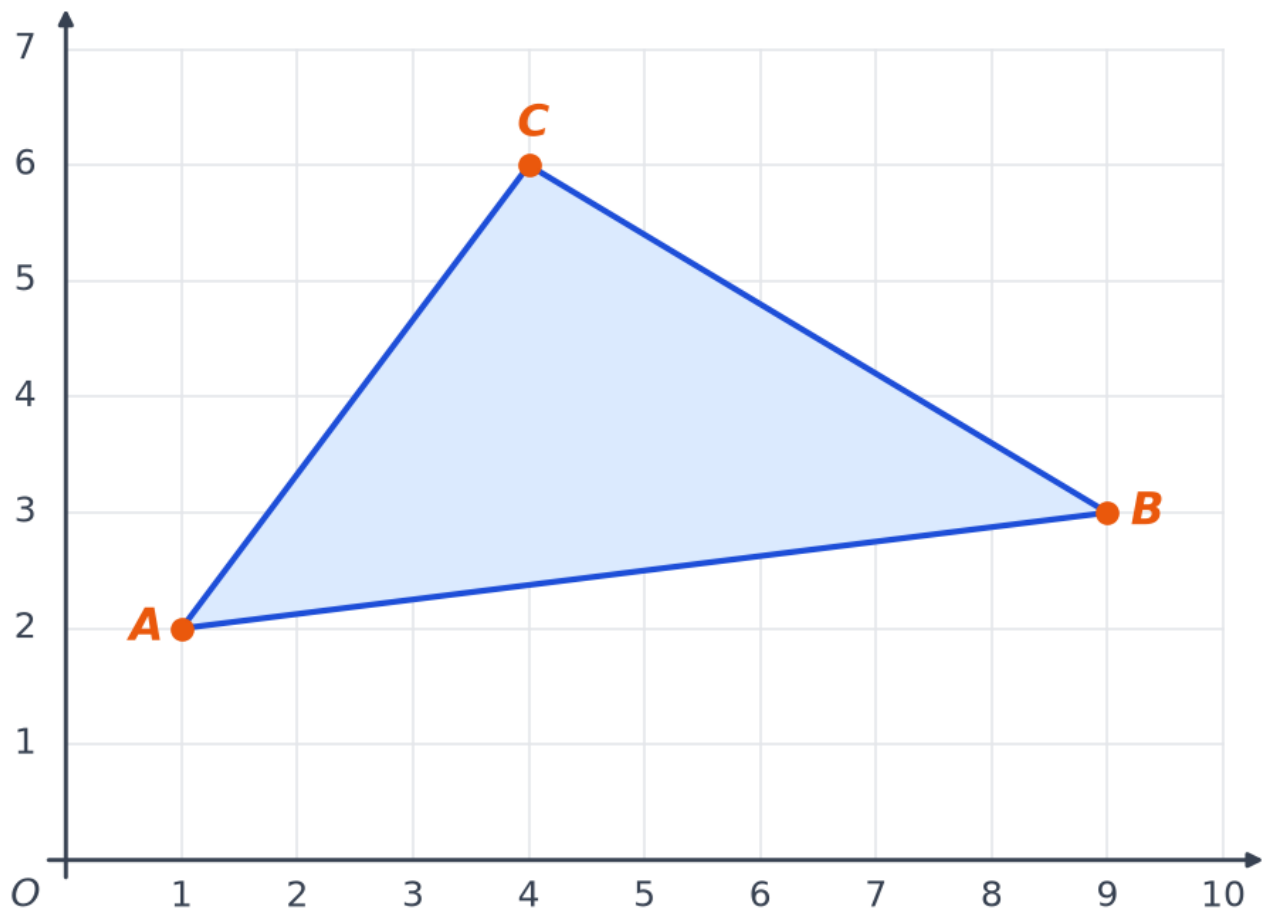
Exercice 4 - Normes et développements (4 points)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$. Ici, aucun repère n'est donné : il faut donc travailler avec les propriétés du produit scalaire.

1. Développe $|\vec{u} + \vec{v}|^2$, puis donne la valeur exacte de $|\vec{u} + \vec{v}|$. (1 point)
2. Calcule de la même façon $|\vec{u} - \vec{v}|^2$. (1 point)
3. Développe et calcule $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$. (1 point)
4. Détermine le réel t tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u} + t\vec{v}$ soient orthogonaux. (1 point)

Exercice 5 - La voile du catamaran (4 points)

Noémie dessine la grand-voile de son catamaran dans un repère orthonormé où une unité représente un mètre. La voile est le triangle de sommets $A(1;2)$, $B(9;3)$ et $C(4;6)$. Avant de commander la toile, elle veut connaître les trois angles de la voile, car le voilier les demande pour renforcer les coins.



1. Donne les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. (1 point)
2. Calcule les longueurs AB et AC en mètres, en valeur exacte. (1 point)
3. Dédus-en une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré. (1 point)
4. Calcule enfin $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, une mesure de $\widehat{ABC}$ au dixième de degré, puis celle de $\widehat{ACB}$.
Le coin C est-il un angle aigu ? (1 point)



Réviser produit scalaire et calculs d'angles avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon produit scalaire dans le plan ; entraîne-toi sur la fiche produit scalaire dans le plan avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en première** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Théorème d'Al-Kashi et orthogonalité : contrôle de maths en première
- Trigonométrie et produit scalaire : contrôle de maths en première
- Produit scalaire et géométrie repérée : contrôle de maths en première