Puissances de 10 et d'un nombre relatif

Lors des années précédentes, vous avez abordé certaines puissances, notamment celles de 2 et 3

Exemple :

$5^2 = 5\times , 5 = 25$ se lit 5 au **carré.**

$2^3 = 2\times , 2\times , 2 = 8$ se lit 2 au **cube.**

I.Les puissances d'un nombre relatif :

1.Cas où l'exposant est positif :

Définition :

Pour tout entier positif n **non nul** et tout nombre entier a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times \ldots}_{n\,facteurs}$$

$a^0 = 1$ (par convention)

n est appelé l'exposant.

a^n se lit **a puissance n** ou **a exposant n**.

Exemples :

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

Téléchargé depuis https://maths-pdf.fr/ - Maths PDF site de maths.

$10^4 = 10 \times\ 10 \times\ 10 \times\ 10 =$

2.Cas où l'exposant est négatif :

Définition de l'inverse d'une puissance :

Pour tout entier positif n **non nul** et tout nombre entier a : $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times \ldots}_{n facteurs}}$$

Exemples :

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times\ 5 \times\ 5} = \frac{1}{125}$$

Remarque :

En l'absence de parenthèses, les puissances sont prioritaires par rapport aux quatre opérations.

Exemple :

Calculer.

$A = 5 + 3^2\ A = 5 + 9A = 14 \qquad A = 2 \times\ 5^3\ A = 2 \times\ 5 \times\ 5 \times\ 5A = 2 \times\ 125A = 250$

3.Produit de puissances :

Propriété :

On considère a un nombre relatif et m, n deux entiers. $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Preuve :

$\underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{\text{m fois}} \times \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{\text{n fois}} = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{\text{(m+n) fois}} = a^{m+n}$

Exemples :

Calculer les produits de puissances.

$A = 7^2 \times , 7^4 = 7^{2+4} = 7^6$

$B = (-3)^5 \times , (-3)^3 = (-3)^{5+3} = (-3)^8$

4.Puissance de puissances :

Propriété :

On considère a un nombre relatif et m, n deux entiers. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Exemples :

Calculer les expressions numériques.

$A = (5^4)^{-2} = 5^{4 \times (-2)} = 5^{-8}$

$B = (9^2)^3 = 9^{2 \times ,3} = 9^6$

5.Quotient de puissances :

Propriété :

Téléchargé depuis https://maths-pdf.fr/ - Maths PDF site de maths.

On considère a un nombre relatif non nul et m, n deux entiers. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Preuve :

$\frac{,a^m,}{,a,^n} =, a^m \times , \frac{1}{a^n} = a^m \times , a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$

Exemples :

Calculer les quotients.

$\frac{(-7)^2}{(-7)^6} = (-7)^{2-6} = (-7)^{-4}$

$\frac{5^6}{5^3} = 5^{6-3} = 5^3$

Remarque :

Nous avons dit au début de la leçon que $a^0 = 1$ par convention.

Nous allons expliquer d'où provient cette formule.

$\frac{a^m}{a^m} = 1$ mais, nous avons aussi $\frac{a^m}{a^m} = a^{,m-m} = a^0$.

Par conséquent, $a^0 = 1$.

II. Cas particuliers : les puissances de 10.

1.Formules et puissances de 10 :

Nous retrouvons les mêmes formules en prenant $a = 10$.

Propriétés :

- $10^n = 10 \times \ 10 \times \ 10 \times \ ... \times \ 10 \times \ 10$ (n fois)
- $10^0 = 1$

- $\dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$ (inverse d'une puissance)
- $(10^m)^n = 10^{m\times n}$ (puissance de puissance)
- $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$ (produit de puissances)
- $\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$ (quotient de puissances)

Exemples :

Effectuer les calculs.

$A = 10^3 = 10\times, 10\times, 10 = 1\,000$

$B = 10^5 = 10\times, 10\times, 10\times, 10\times, 10 = 100\,000$

$C = 10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0,01$

$D = 10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10\,000} = 0,000\,1$

$E = 2\times 10^3 + 3\times 10^2 = 2\times 1\,000 + 3\times 100 = 2\,000 + 300 = 2\,300$

$F = \dfrac{10^{-3}}{10^{-5}} = 10^{-3-(-5)} = 10^{-3+5} = 10^{2} = 100$

2.L'écriture (ou notation) scientifique d'un nombre :

Définition :

On considère x un nombre relatif.

Il existe un entier relatif non nul a et un entier n tel que :

$x = a\times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

Cette écriture est appelée **écriture scientifique** (ou notation scientifique) du nombre a .

Téléchargé depuis https://maths-pdf.fr/ - Maths PDF site de maths.

Exemples :

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$A = 0,000\ 002\,56 = 2,56 \times\ 10^{-6}$

$B = 975\,632,568\,47 = 9,756\,325\,684\,7\ \times\ 10^{5}$

$C = 0,753 = 7,53 \times\ 10^{-1}$

$D = 9\,876,61 \times ,10^{-9} = 9,876\,61 \times\ 10^{3} \times\ 10^{-9} = 9,876\,61 \times\ 10^{-6}$