Puissances de 10 et d'un nombre relatif

En mathématiques, le concept de puissance peut être étendu pour inclure non seulement les nombres entiers, mais aussi les nombres rationnels et même les nombres réels. Lorsqu'il s'agit de nombres réels, le concept de puissances négatives et fractionnaires entre en jeu.

Lors des années précédentes, vous avez abordé certaines puissances, notamment celles de 2 et 3

Exemple :

$5^2 = 5\times ,5 = 25$ se lit 5 au **carré.**

$2^3 = 2\times ,2\times ,2 = 8$ se lit 2 au **cube.**

I.Les puissances d'un nombre relatif :

1.Cas où l'exposant est positif :

Définition :

Pour tout entier positif n **non nul** et tout nombre entier a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times \dots}_{n\,facteurs}$$

$a^0 = 1$ (par convention)

n est appelé l'exposant.

a^n se lit **a puissance n** ou **a exposant n**.

Exemples :

$4^3 = 4\times\ 4\times\ 4 = 64$

$3^5 = 3 \times\ 3 \times\ 3 \times\ 3 \times\ 3 = 243$

$10^4 = 10 \times\ 10 \times\ 10 \times\ 10 =$

2.Cas où l'exposant est négatif :

Définition de l'inverse d'une puissance :

Pour tout entier positif n **non nul** et tout nombre entier a :$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times \ldots}_{n facteurs}}$$

Exemples :

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times\ 5 \times\ 5} = \frac{1}{125}$

Remarque :

En l'absence de parenthèses, les puissances sont prioritaires par rapport aux quatre opérations.

Exemple :

Calculer.

$A = 5 + 3^2$
$A = 5 + 9$
$A = 14$

$A = 2 \times\ 5^3$
$A = 2 \times\ 5 \times\ 5 \times\ 5$
$A = 2 \times\ 125$
$A = 250$

3.Produit de puissances :

Propriété :

On considère a un nombre relatif et m, n deux entiers.$a^m \times \ a^n = a^{m+n}$

Preuve :

$\underbrace{a \times \ a \times \ a \times \ \ldots.. \times \ a}$ $\times$ $\underbrace{a \times \ a \times \ a \ldots \times \ a}$=$\underbrace{a \times \ a \times \ a \times \ \ldots.. \times \ a}$=$a^{m+n}$

m fois n fois (m+n) fois

Exemples :

Calculer les produits de puissances.

$A = 7^2 \times , 7^4 = 7^{2+4} = 7^6$

$B = (-3)^5 \times , (-3)^3 = (-3)^{5+3} = (-3)^8$

4.Puissance de puissances :

Propriété :

On considère a un nombre relatif et m, n deux entiers.$(a^m)^{\ n} = a^{m \times \ n}$

Exemples :

Calculer les expressions numériques.

$A = (5^4)^{-2} = 5^{4 \times \ (-2)} = 5^{-8}$

$B = (9^2)^3 = 9^{2 \times ,3} = 9^6$

5.Quotient de puissances :

Propriété :

On considère a un nombre relatif non nul et m, n deux entiers.$\frac{a^m}{a^{\ n}} = a^{m- \ n}$

Téléchargé depuis https://maths-pdf.fr/ - Maths PDF site de maths.

Preuve :

$$\frac{,a^m,}{,a,^n} =, a^m \times \,, \frac{1}{a^n} = a^m \times \,, a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

Exemples :

Calculer les quotients.

$$\frac{(-7)^2}{(-7)^6} = (-7)^{2-6} = (-7)^{-4}$$

$$\frac{5^6}{5^3} = 5^{6-3} = 5^3$$

Remarque :

Nous avons dit au début de la leçon que $a^0 = 1$ par convention.

Nous allons expliquer d'où provient cette formule.

$\frac{a^m}{a^m} = 1$ mais, nous avons aussi $\frac{a^m}{a^m} = a^{,m-m} = a^0$.

Par conséquent, $a^0 = 1$.

II. Cas particuliers : les puissances de 10.

1.Formules et puissances de 10 :

Nous retrouvons les mêmes formules en prenant $a = 10$.
Propriétés :

- $10^n = 10 \times\ 10 \times\ 10 \times\ ... \times\ 10 \times\ 10$ (n fois)
- $10^0 = 1$
- $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ (inverse d'une puissance)
- $(10^m)^{\,n} = 10^{m\times\,n}$ (puissance de puissance)
- $10^m \times\ 10^n = 10^{m+n}$ (produit de puissances)

- $\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$ (quotient de puissances)

Exemples :

Effectuer les calculs.

$A = 10^3 = 10\times\,,10\times\,,10 = 1\,000$

$B = 10^5 = 10\times\,,10\times\,,10\times\,,10\times\,,10 = 100\,000$

$C = 10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0,01$

$D = 10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10\,000} = 0,000\,1$

$E = 2\times\ 10^3 + 3\times\ 10^2 = 2\times\ 1\,000 + 3\times\ 100 = 2\,000 + 300 = 2\,300$

$F = \dfrac{10^{-3}}{10^{-5}} = 10^{-3-(-5)} = 10^{-3+5} = 10^{,2} = 100$

2.L'écriture (ou notation) scientifique d'un nombre :

Définition :

On considère x un nombre relatif.

Il existe un entier relatif non nul a et un entier n tel que :

$x = a\times\ 10^n$ avec $1\leq\ a < 10$.

Cette écriture est appelée **écriture scientifique** (ou notation scientifique) du nombre a .

Exemples :

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$A = 0,000\ 002\,56 = 2,56\times\ 10^{-6}$

$B = 975\,632,568\,47 = 9,756\,325\,684\,7\ \times\ 10^5$

Téléchargé depuis https://maths-pdf.fr/ - Maths PDF site de maths.

$C = 0,753 = 7,53 \times \ 10^{-1}$

$D = 9\,876,61 \times , 10^{-9} = 9,876\,61 \times \ 10^{3} \times \ 10^{-9} = 9,876\,61 \times \ 10^{-6}$