

Raisonnement par récurrence

Ce qu'évalue le contrôle : raisonnement par récurrence

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **2 heures**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Suites et raisonnement par récurrence (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Rédiger une démonstration par récurrence en trois étapes : initialisation, hérédité et conclusion
- Démontrer la formule explicite d'une suite définie par une relation de récurrence
- Établir une formule de somme ou une inégalité portant sur un entier naturel
- Repérer l'étape manquante dans une fausse démonstration par récurrence
- Encadrer une suite et prouver son sens de variation à l'aide d'une fonction croissante

Avant de commencer

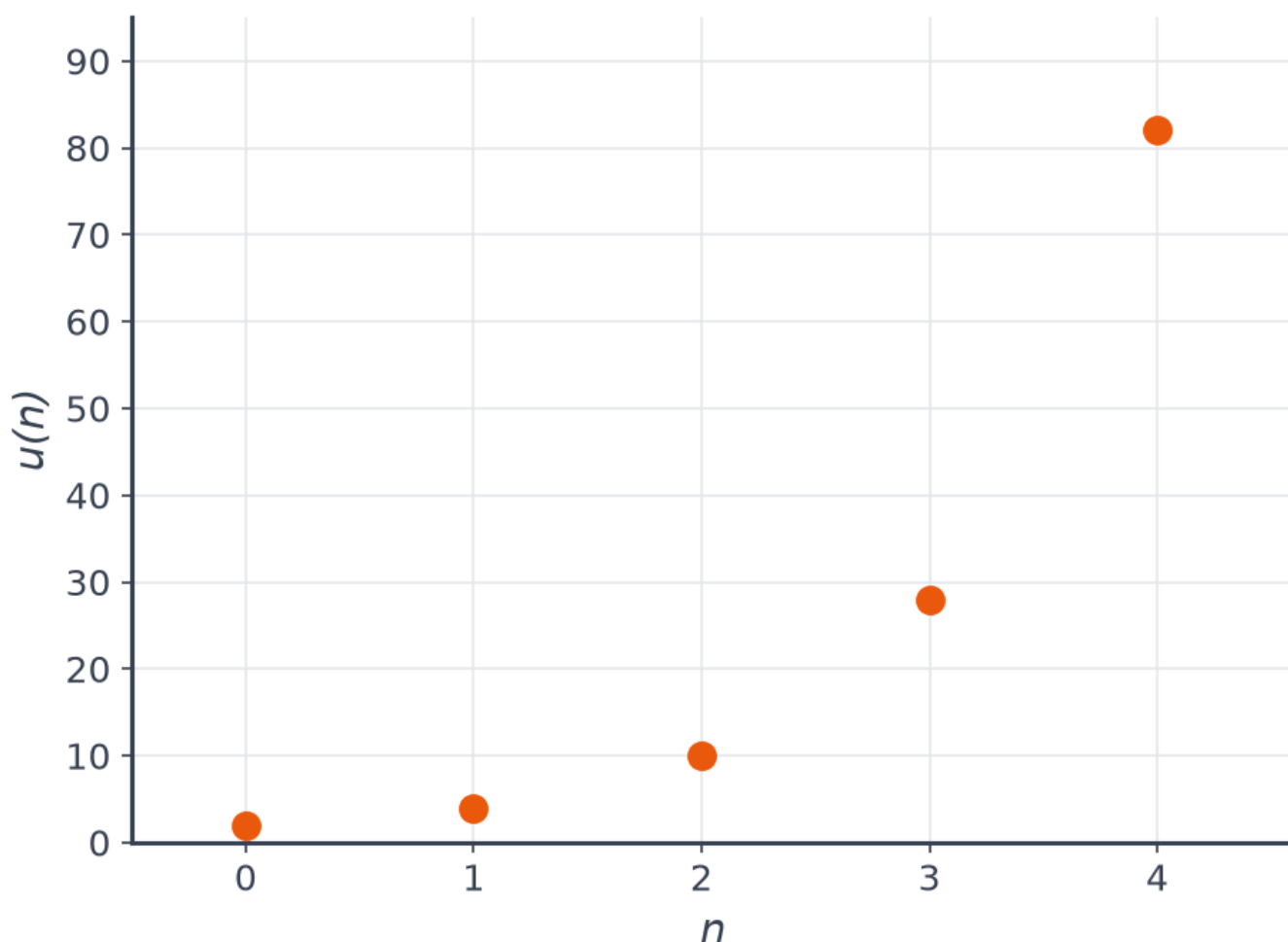
Pour chaque démonstration, écris d'abord clairement la propriété $P(n)$ que tu veux prouver. Vérifie ensuite l'initialisation au **bon rang**, car il n'est pas toujours égal à 0. Dans l'hérédité, pars de u_{n+1} ou de 2^{n+1} et fais apparaître l'**hypothèse de récurrence**, puis signale précisément où tu l'utilises. Enfin, relis ta conclusion : elle doit reprendre la propriété pour tout

entier concerné.

Le sujet du contrôle : raisonnement par récurrence

Exercice 1 - Une suite explicite à démontrer (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Le nuage de points ci-dessous représente ses cinq premiers termes.



1. Calcule u_1 , u_2 et u_3 , puis vérifie que ces valeurs sont cohérentes avec le nuage de points. (1 point)
2. Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n + 1$. (2 points)

3. Donne alors la valeur exacte de u_{10} . Avec la calculatrice, trouve ensuite le plus petit entier n tel que $u_n > 1000000$. (1 point)

Exercice 2 - Une somme de produits (4 points)

Pour tout entier $n \geq 1$, on note S_n la somme des produits $k(k+1)$ quand k varie de 1 à n :

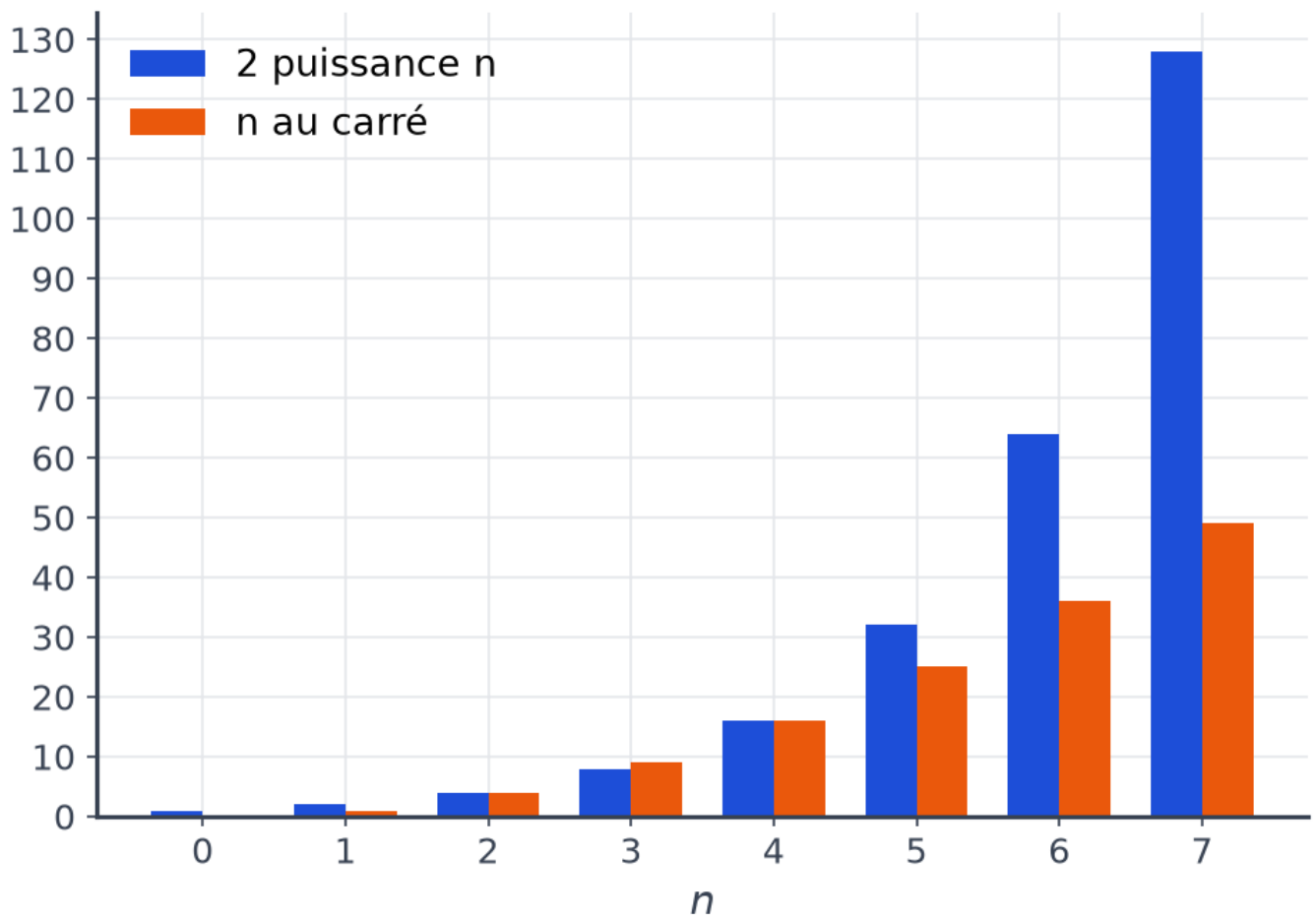
$$S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)$$

Par exemple, $S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 8$.

1. Calcule S_1 et S_3 , puis vérifie que la formule $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ donne bien S_1 , S_2 et S_3 . (1 point)
2. Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. (2,5 points)
3. Déduis-en la valeur de S_{10} . (0,5 point)

Exercice 3 - Puissances de 2 et carrés (4 points)

Le diagramme compare 2^n et n^2 pour les entiers de 0 à 7. On remarque que l'écart se creuse vite, mais pas dès le début.



1. Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2^n \geq n+1$. (1,5 point)
2. Compare 2^n et n^2 pour $n=2$, $n=3$, $n=4$ et $n=5$. Que remarques-tu ? (0,5 point)
3. Montre que, pour tout entier $n \geq 3$, $n^2 - 2n - 1 \geq 0$. On pourra écrire $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$. (1 point)
4. Prouve enfin par récurrence que, pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$. (1 point)

Exercice 4 - La récurrence de Léo (4 points)

Léo affirme que, pour tout entier naturel n , le nombre $10^n + 1$ est divisible par 9. Pour le prouver, il suppose qu'il existe un entier k tel que $10^n + 1 = 9k$, puis il conclut que la propriété est vraie pour tout n .

1. Sous l'hypothèse de Léo, montre que $10^{n+1} + 1 = 9(10k - 1)$. Que prouve ce calcul ? (1

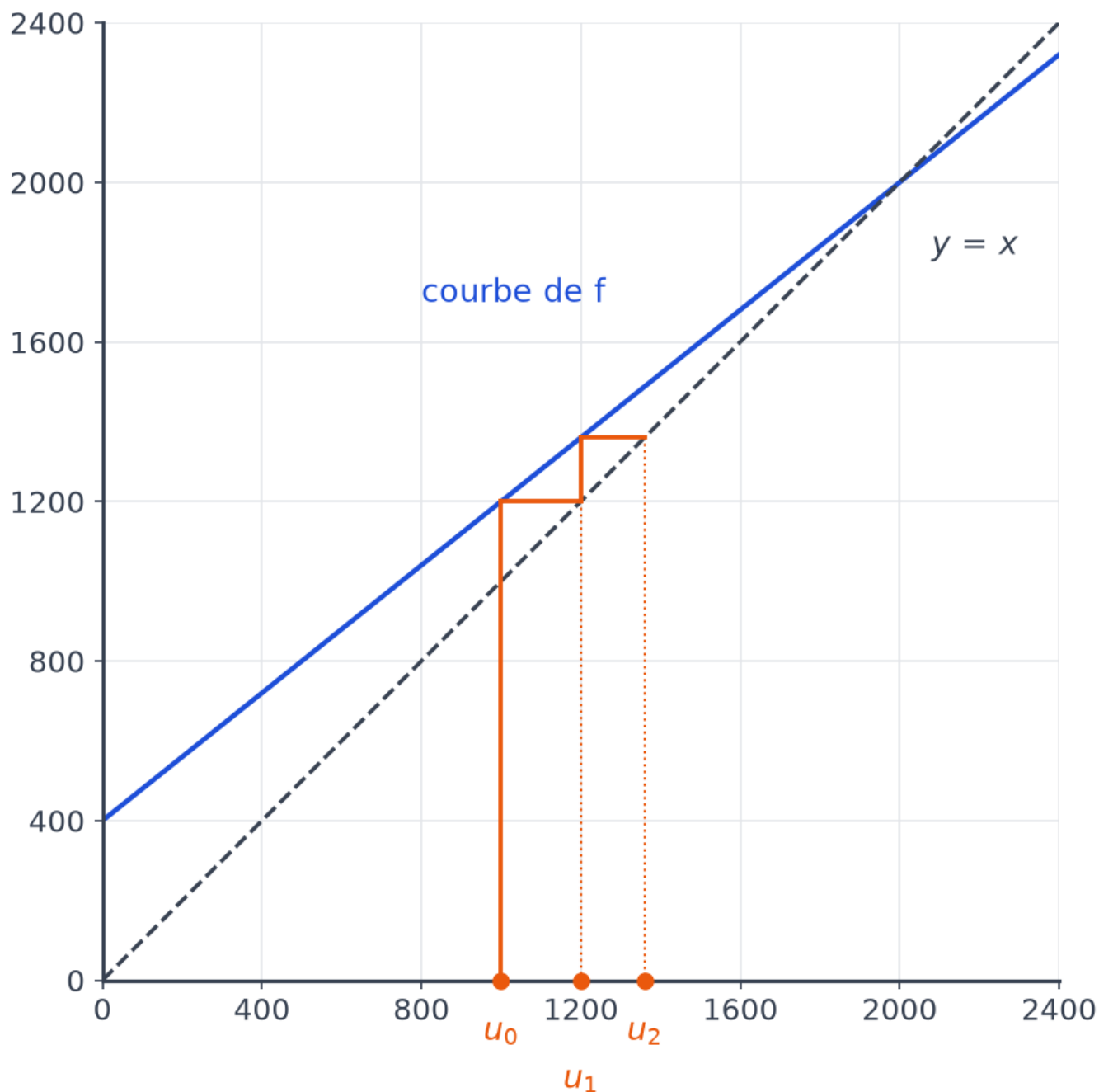
point)

2. Calcule 10^0+1 , 10^1+1 et 10^2+1 . Sont-ils divisibles par 9 ? (1 point)
3. Explique quelle étape manque au raisonnement de Léo, puis pourquoi sa conclusion est fausse. (1 point)
4. Démontre en revanche par récurrence que, pour tout entier naturel n , 10^n-1 est divisible par 9. (1 point)

Exercice 5 - Les truites du bassin (4 points)

Au 1er janvier 2026, le bassin d'une pisciculture contient 1 000 truites. Chaque année, l'exploitante, Maïwenn, vend 20 % des truites présentes, puis elle ajoute 400 jeunes truites. On note u_n le nombre de truites au 1er janvier de l'année $2026+n$, donc $u_0=1000$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=0,8x+400$. Le graphique ci-dessous montre la courbe de f , la droite d'équation $y=x$ et la construction de u_1 et u_2 .



1. Justifie la relation $u_{n+1} = 0,8u_n + 400$, puis calcule u_1 et u_2 . (1 point)
2. Explique comment prolonger l'escalier pour placer u_3 sur l'axe des abscisses, puis calcule la valeur exacte de u_3 . (1 point)
3. Démonstre par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1000 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2000$. (1,5 point)
4. Interprète ce résultat pour Maiwenn : que peut-on dire de l'évolution du nombre de truites ? (0,5 point)



Réviser raisonnement par récurrence avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon le raisonnement par récurrence puis suites numériques ; entraîne-toi sur la fiche raisonnement par récurrence et limites de suites avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Limites de suites et convergence : contrôle de maths en terminale
- Suites et logarithme népérien : contrôle de maths en terminale
- Limites de fonctions et asymptotes : contrôle de maths en terminale