

Second degré et optimisation

Ce qu'évalue le contrôle : second degré et optimisation

L'essentiel du sujet

- Niveau **première**
- Durée **1 heure 30 minutes**
- Calculatrice **interdite**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Second degré (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Écrire un polynôme du second degré sous forme canonique pour trouver son extremum
- Mettre en équation une situation concrète et optimiser une aire ou un bénéfice
- Résoudre une équation ou une inéquation du second degré à l'aide d'une forme adaptée
- Étudier le signe d'un trinôme pour déterminer un intervalle de rentabilité
- Discuter le nombre de solutions d'une équation selon la valeur d'un paramètre m

Avant de commencer

Pour chaque problème, commence par préciser l'**intervalle** où vit la variable : une longueur ou un temps ne peut pas être négatif. Ensuite, choisis la forme la plus utile : la forme canonique donne le sommet, alors que la **forme factorisée** donne les racines et le signe. Vérifie toujours une forme en la redéveloppant. Enfin, termine chaque exercice par une **phrase-réponse** avec l'unité, car c'est elle qui répond à la question posée.

Le sujet du contrôle : second degré et optimisation

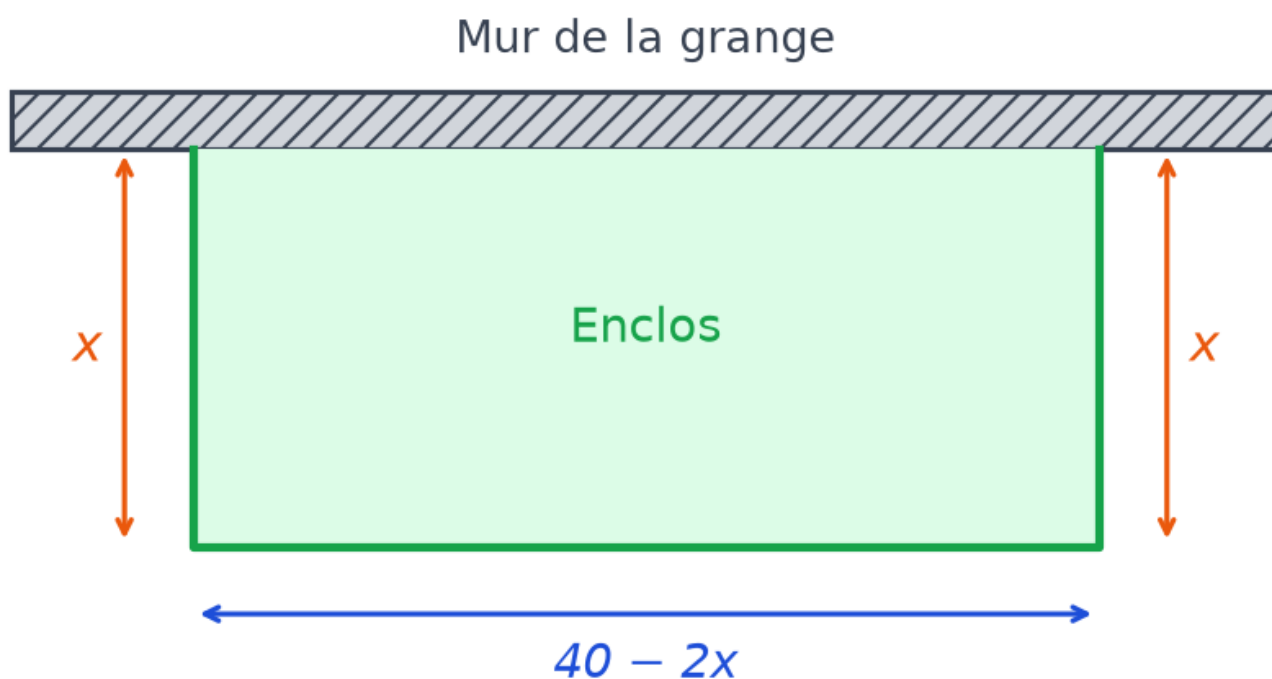
Exercice 1 - Forme canonique et sommet (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$.

1. Montre que, pour tout réel x , $f(x) = -2(x-3)^2 + 8$. (1 point)
2. Déduis-en le tableau de variations de f , puis son extremum, en précisant s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. (1 point)
3. Résous ensuite l'équation $f(x) = 0$ à l'aide de la forme canonique, puis écris $f(x)$ sous forme factorisée. (1 point)

Exercice 2 - L'enclos contre le mur (4,5 points)

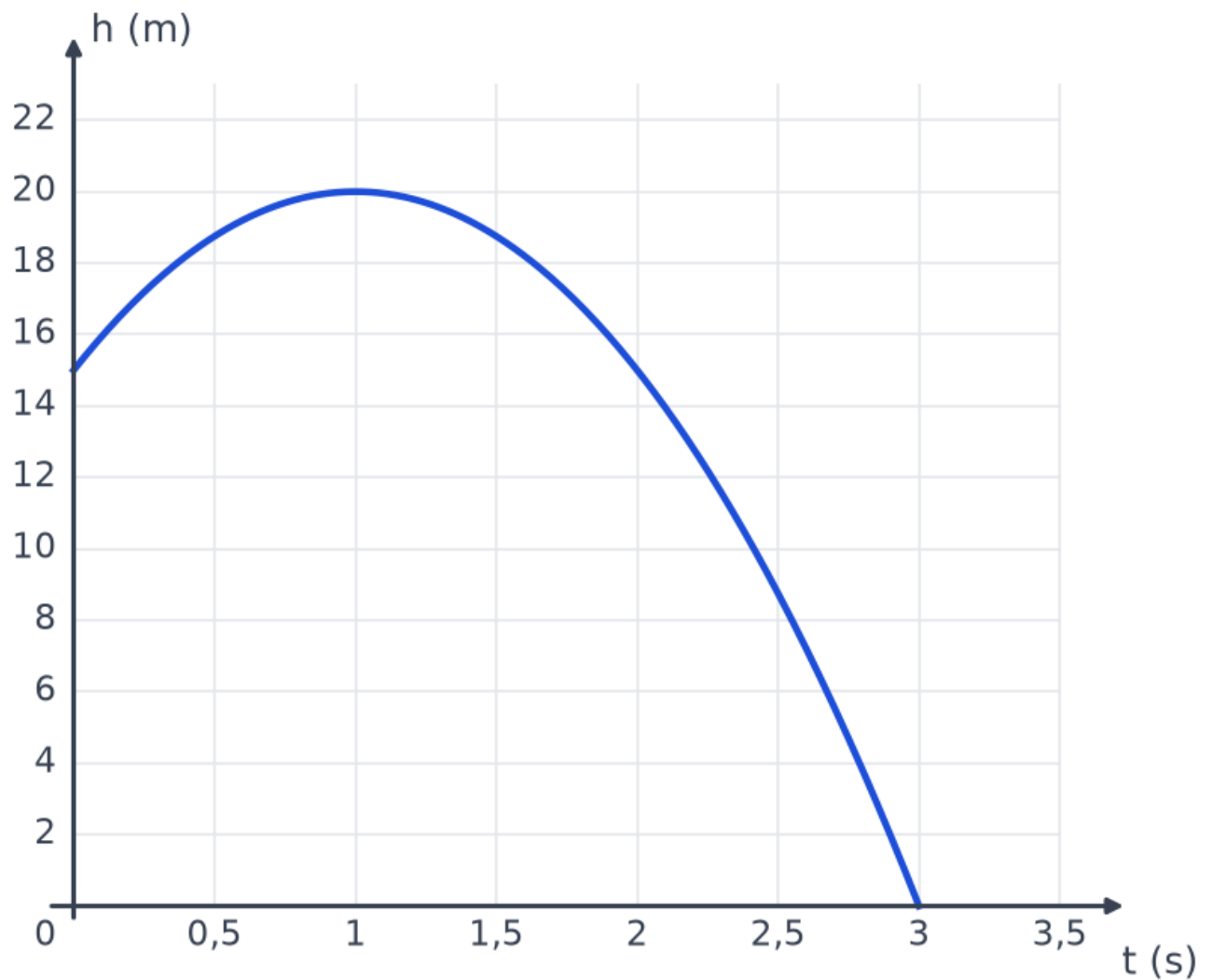
Sofiane dispose de 40 mètres de grillage pour construire un enclos rectangulaire à poules contre le mur de sa grange. Le mur forme un côté, donc le grillage ne sert que pour les trois autres. On note x la largeur de l'enclos, en mètres, comme sur le schéma.



1. Explique pourquoi le côté parallèle au mur mesure $40 - 2x$, puis pourquoi x appartient à $]0;20[$. Montre alors que l'aire de l'enclos vaut $A(x) = -2x^2 + 40x$. (1 point)
2. Écris $A(x)$ sous forme canonique. (1 point)
3. Quelles dimensions Sofiane doit-il choisir pour obtenir une aire maximale ? Donne aussi cette aire. (1,5 point)
4. Ses poules ont besoin d'au moins 150 m^2 . Détermine l'ensemble des largeurs x qui conviennent. (1 point)

Exercice 3 - La trajectoire du ballon (4,5 points)

Depuis le haut d'une falaise, Timéo lance un ballon vers le haut. Sa hauteur au-dessus de la plage, en mètres, est donnée en fonction du temps t , en secondes, par $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$, pour $t \geq 0$ et jusqu'à ce que le ballon touche le sable. La courbe de h est tracée ci-dessous.



1. Calcule $h(0)$, puis interprète ce résultat. (0,5 point)
2. Vérifie que $h(t) = -5(t-1)^2 + 20$. Déduis-en la hauteur maximale atteinte par le ballon et l'instant où elle est atteinte. (1,5 point)
3. Vérifie aussi que $h(t) = -5(t-3)(t+1)$. À quel instant le ballon touche-t-il le sable ? (1,5 point)
4. Pendant combien de temps le ballon est-il au-dessus de la falaise, c'est-à-dire à au moins 15 m ? Justifie par le calcul. (1 point)

Exercice 4 - Le bénéfice du céramiste (4 points)

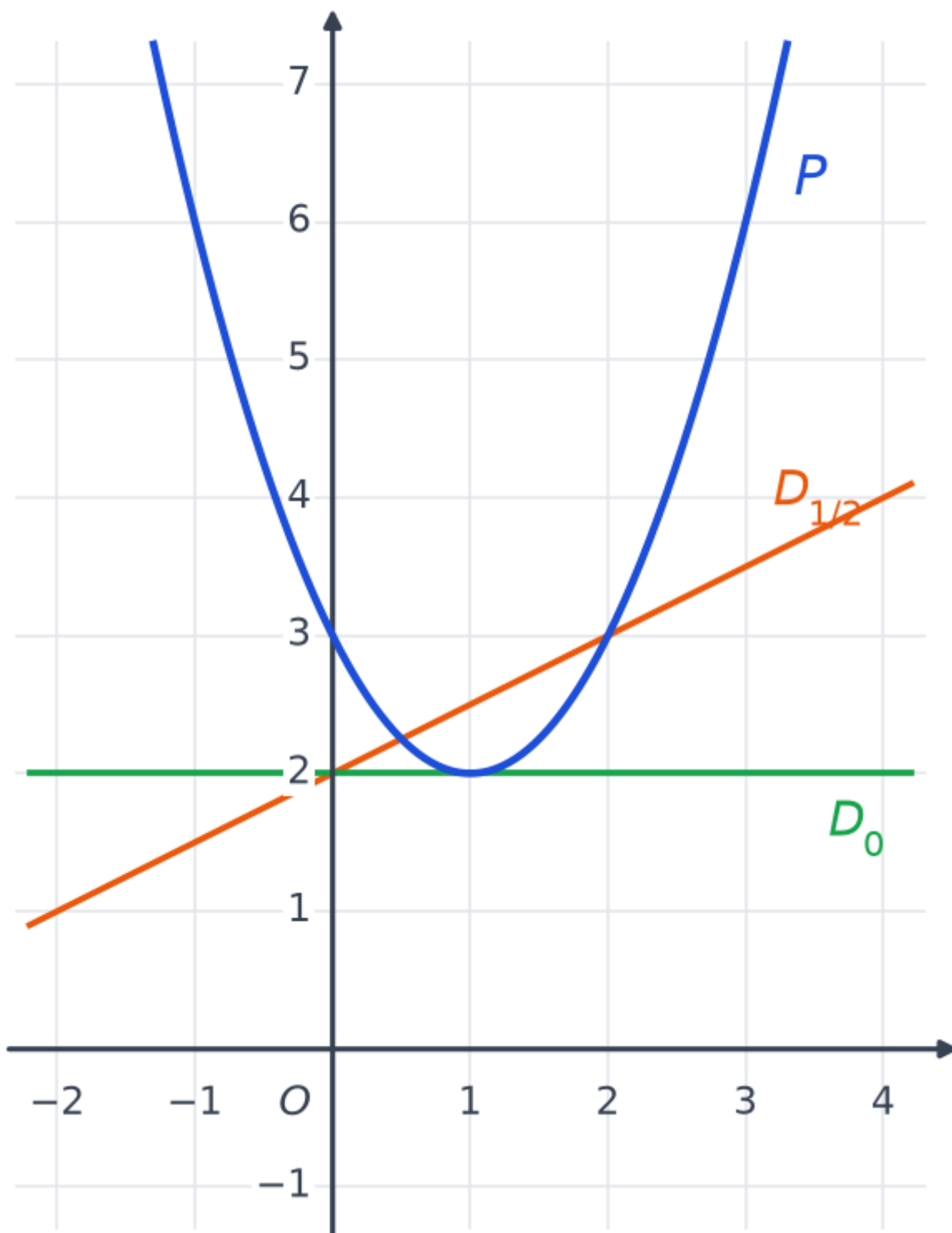
Un céramiste fabrique chaque jour x bols, avec x compris entre 0 et 35. Le coût de

fabrication, en euros, vaut $C(x) = x^2 + 12x + 180$. De plus, chaque bol est vendu 48 €, et toute la production est vendue.

1. Montre que le bénéfice journalier vaut $B(x) = -x^2 + 36x - 180$. (0,5 point)
2. Calcule le discriminant de $B(x)$, puis trouve ses racines. (1,5 point)
3. Dresse le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0;35]$. Combien de bols le céramiste doit-il fabriquer pour être rentable ? (1 point)
4. Détermine enfin le nombre de bols qui rend le bénéfice maximal, ainsi que ce bénéfice. (1 point)

Exercice 5 - Une droite qui dépend de m (4 points)

Soit P la parabole d'équation $y = x^2 - 2x + 3$. Pour tout réel m , on note D_m la droite d'équation $y = mx + 2$. La figure montre P , $D_{1/2}$ et D_0 .



1. Lis sur le graphique les coordonnées des points communs à P et $D_{1/2}$. (0,5 point)
2. Retrouve ces points par le calcul, en résolvant $2x^2 - 5x + 2 = 0$ après avoir justifié cette équation. (1 point)
3. Dans le cas général, montre que les abscisses des points communs à P et D_m vérifient

$x^2 - (2+m)x + 1 = 0$, puis que le discriminant vaut $\Delta = m^2 + 4m$. (1 point)

4. Selon les valeurs de m , donne le nombre de points communs à P et D_m . Que peut-on dire alors de la droite D_0 ? (1,5 point)



Réviser second degré et optimisation avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon les équations et les inéquations du second degré ; entraîne-toi sur la fiche second degré et polynômes avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en première** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Équations du second degré : contrôle de maths en première
- Second degré et dérivation : contrôle de maths en première
- Suites arithmétiques et géométriques : contrôle de maths en première