

# Suites et logarithme népérien

## Ce qu'évalue le contrôle : suites et logarithme népérien

---

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **2 heures**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

**Chapitres :** Suites et raisonnement par récurrence et Fonction logarithme népérien (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Utiliser les propriétés algébriques du logarithme népérien pour simplifier une expression et résoudre une équation
- Déterminer un seuil pour une suite géométrique en résolvant une inéquation avec  $\ln$
- Étudier les limites et les variations d'une fonction contenant un logarithme
- Démontrer par récurrence l'encadrement et la monotonie d'une suite définie par une relation de récurrence, puis sa convergence
- Étudier une suite arithmético-géométrique à l'aide d'une suite auxiliaire géométrique dans un contexte financier

Avant de commencer

Commence par l'exercice 1 pour t'échauffer, puis traite les exercices dans l'ordre, car l'exercice

4 réutilise les résultats de l'exercice 3. Dans une récurrence, écris clairement la **propriété** que tu démontres, puis l'initialisation et l'hérédité. Pour un seuil, applique  $\ln$  aux deux membres et, surtout, **change le sens de l'inégalité** quand tu divises par un logarithme négatif. Enfin, contrôle chaque rang trouvé avec la calculatrice.

## Le sujet du contrôle : suites et logarithme népérien

---

### Exercice 1 - Automatismes sur $\ln$ et les suites (3 points)

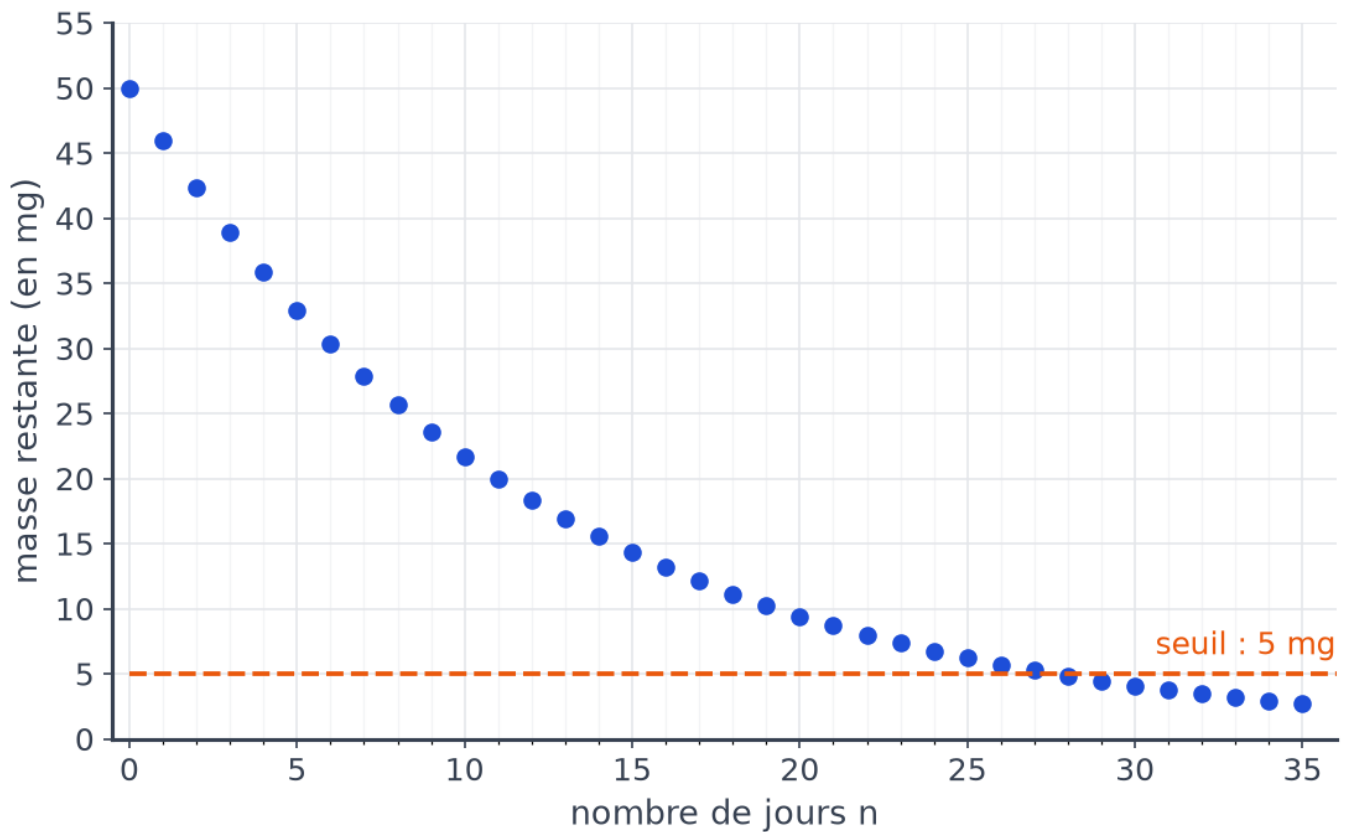
---

1. Écris d'abord  $A = \ln 12 + \ln 3 - 2 \ln 6$  sous la forme la plus simple possible. (0,5 point)
2. Résous ensuite dans  $]\frac{1}{2}; +\infty[$  l'équation  $\ln(2x-1) = \ln(x+3)$ . (1 point)
3. Détermine le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $0,9^n < 0,05$ , en justifiant avec le logarithme népérien. (1 point)
4. Donne enfin la limite de la suite définie par  $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$ . (0,5 point)

### Exercice 2 - La décroissance d'un échantillon radioactif (4 points)

---

Un laboratoire dispose de 50 mg d'un isotope radioactif. Chaque jour, 8 % de la masse présente se désintègre. On note  $m_n$  la masse restante, en mg, au bout de  $n$  jours, de sorte que  $m_0 = 50$ . Le nuage de points ci-dessous représente les premiers termes de la suite.



1. Justifie que la suite  $(m_n)$  est géométrique, puis exprime  $m_n$  en fonction de  $n$ . (1 point)
2. Calcule la masse restante au bout d'une semaine, arrondie au centième de milligramme. (0,5 point)
3. L'échantillon devient inutilisable quand sa masse passe sous 5 mg. Détermine alors, par le calcul, le nombre de jours au bout duquel cela se produit. (1,5 point)
4. Lis ce résultat sur le graphique, puis explique pourquoi une lecture graphique seule ne suffirait pas à conclure. (1 point)

### Exercice 3 - Étude de la fonction $f$ (4 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x - \ln x$ .

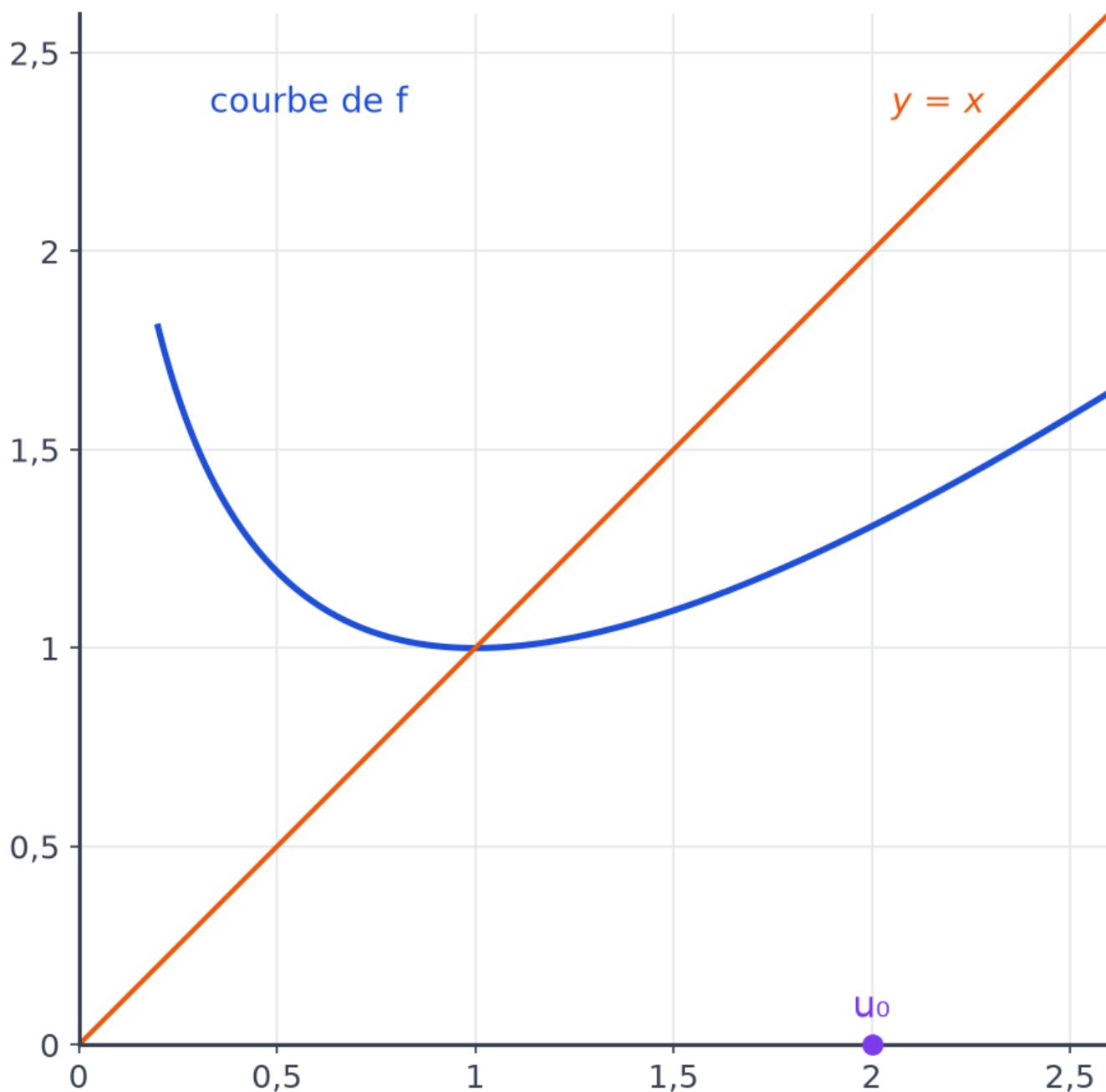
1. Calcule la limite de  $f$  en 0. (0,5 point)

2. En écrivant  $f(x) = x(1 - \frac{\ln x}{x})$ , détermine la limite de  $f$  en  $+\infty$ . (1 point)
3. Calcule  $f'(x)$ , étudie son signe, puis dresse le tableau de variations complet de  $f$ . (1,5 point)
4. Démontre que  $f(x) \leq x$  pour tout  $x \geq 1$ . Résous aussi l'équation  $f(x) = x$ . (1 point)

#### Exercice 4 - Une suite qui converge vers 1 (4 points)

---

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n)$ , où  $f$  est la fonction de l'exercice 3. La courbe de  $f$  et la droite d'équation  $y = x$  sont tracées ci-dessous.



1. Calcule  $u_1$  et  $u_2$  à  $10^{-3}$  près. Construis ensuite  $u_1$  et  $u_2$  sur l'axe des abscisses, sans calcul, à l'aide de la figure. (1 point)
2. Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ . (1,5 point)
3. Dédus-en que la suite  $(u_n)$  est convergente. (0,5 point)
4. On note  $\ell$  sa limite et on admet que  $f(\ell) = \ell$ . Détermine alors la valeur de  $\ell$ . (1 point)

## Exercice 5 - Le placement de Soraya (5 points)

---

Le 1er janvier 2026, Soraya place 1 000 € sur un livret rémunéré à 2 % par an. Chaque 1er janvier suivant, la banque ajoute les intérêts, puis Soraya verse 600 € de plus. On note  $C_n$  le capital, en euros, au 1er janvier de l'année  $2026+n$ , après le versement. Ainsi,  $C_0 = 1000$  et  $C_{n+1} = 1,02C_n + 600$ .

1. Calcule  $C_1$  et  $C_2$ . (0,5 point)
2. On pose  $v_n = C_n + 30000$ . Démontre que la suite  $(v_n)$  est géométrique, puis précise sa raison et son premier terme. (1 point)
3. Exprime  $v_n$ , puis  $C_n$ , en fonction de  $n$ . (1 point)
4. Soraya affirme que son capital dépassera 10 000 € dès 2038. A-t-elle raison ? Détermine l'année cherchée à l'aide du logarithme népérien. (1,5 point)
5. Calcule la limite de  $(C_n)$ , puis interprète-la dans le contexte. (1 point)



## Réviser suites et logarithme népérien avant le contrôle

---

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon le raisonnement par récurrence puis suites numériques puis fonction logarithme népérien ; entraîne-toi sur la fiche raisonnement par récurrence et limites de suites et logarithme népérien avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Raisonnement par récurrence : contrôle de maths en terminale
- Limites de suites et convergence : contrôle de maths en terminale
- Fonction logarithme népérien : contrôle de maths en terminale
- Étude de fonction avec logarithme : contrôle de maths en terminale