

Théorème d'Al-Kashi et orthogonalité

Ce qu'évalue le contrôle : théorème d'Al-Kashi et orthogonalité

L'essentiel du sujet

- Niveau **première**
- Durée **1 heure 30 minutes**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Produit scalaire (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Calculer une longueur ou un angle d'un triangle quelconque avec le théorème d'Al-Kashi
- Démontrer que deux droites sont perpendiculaires en décomposant des vecteurs avec la relation de Chasles
- Déterminer l'ensemble des points M tels que le produit scalaire de MA et MB est nul
- Utiliser le produit scalaire pour calculer la longueur d'une médiane
- Résoudre un problème concret de distances et d'angles à l'aide du produit scalaire

Avant de commencer

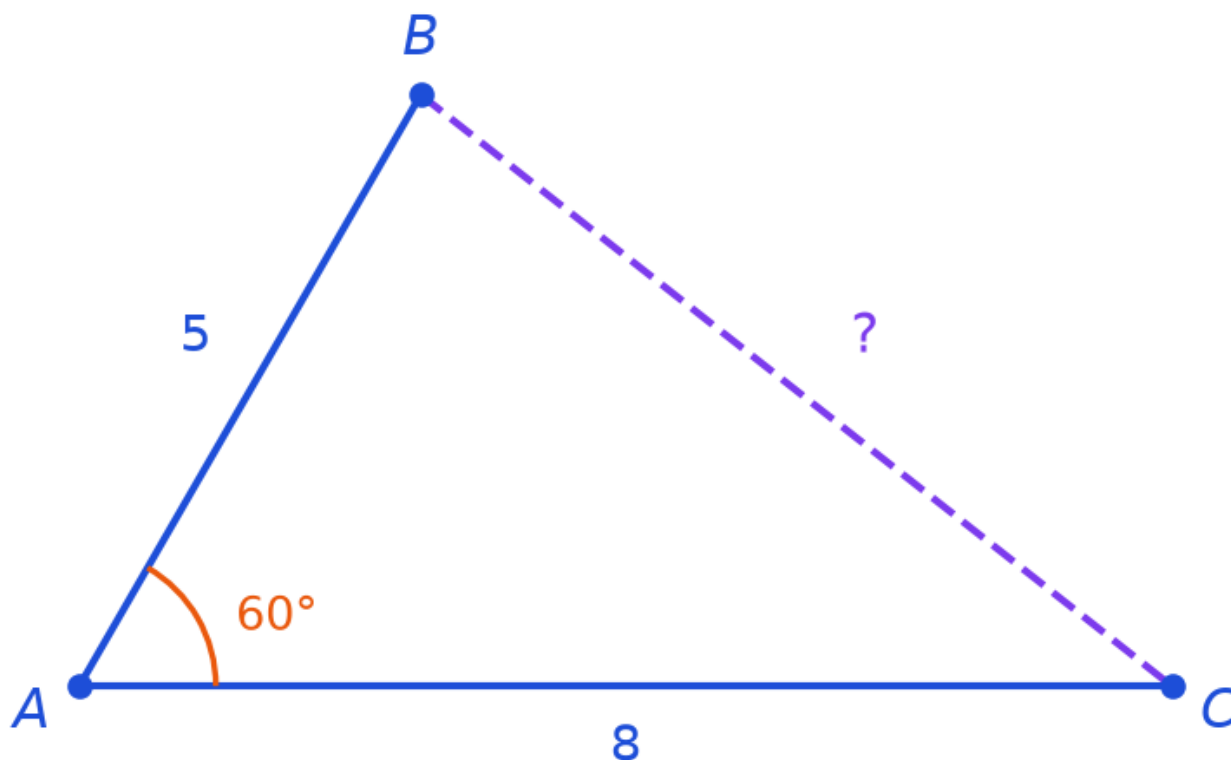
Avant chaque calcul, repère la formule adaptée : Al-Kashi quand tu connais **deux côtés et l'angle compris**, ou les trois côtés. Pour prouver une orthogonalité, décompose chaque

vecteur avec Chasles, puis développe le produit : beaucoup de termes s'annulent, car ils portent sur des vecteurs orthogonaux. Règle ta calculatrice en **degrés**, et garde les valeurs exactes jusqu'au bout. Enfin, vérifie qu'un angle trouvé reste cohérent avec la figure.

Le sujet du contrôle : théorème d'Al-Kashi et orthogonalité

Exercice 1 - Un triangle quelconque (4 points)

Dans le triangle ABC ci-dessous, on sait que $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Cependant, la figure n'est pas à l'échelle.

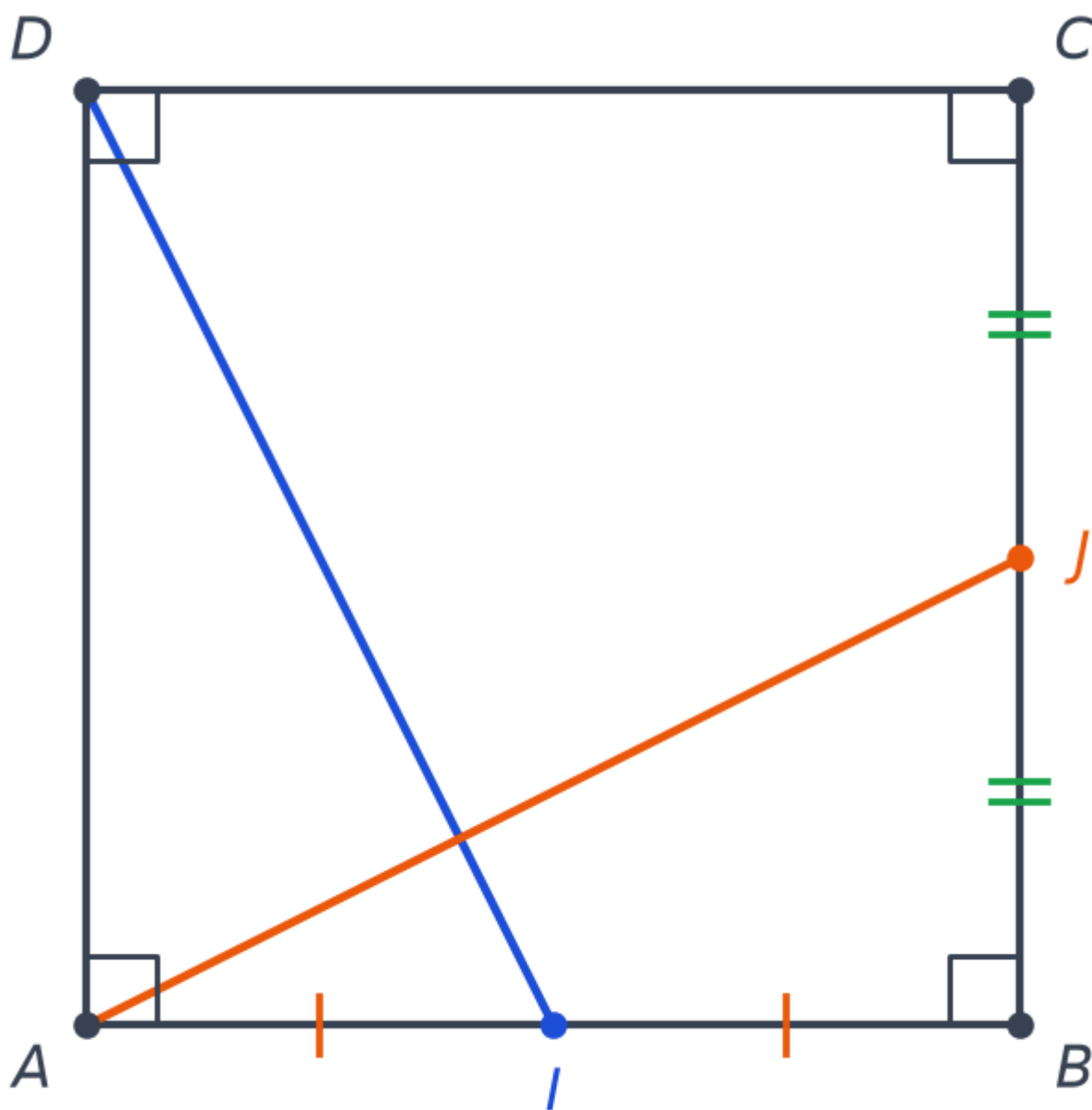


1. Calcule d'abord la longueur exacte BC à l'aide du théorème d'Al-Kashi. (1,5 point)
2. Calcule ensuite $\cos \widehat{ABC}$ sous forme de fraction, puis donne une mesure de $\widehat{ABC}$ arrondie au dixième de degré. (1,5 point)

3. Déduis-en alors une mesure de $\widehat{ACB}$, puis vérifie-la par un autre calcul. (1 point)

Exercice 2 - Deux segments dans un carré (4 points)

$ABCD$ est un carré de côté 6. De plus, le point I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$. On veut démontrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.



1. Justifie d'abord que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$. (1 point)
2. Calcule ensuite $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$. (1 point)
3. En écrivant $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$, calcule $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AJ}$. Conclue alors. (1 point)
4. Retrouve enfin ce résultat avec des coordonnées, dans le repère orthonormé d'origine A où $B(6;0)$ et $D(0;6)$. (1 point)

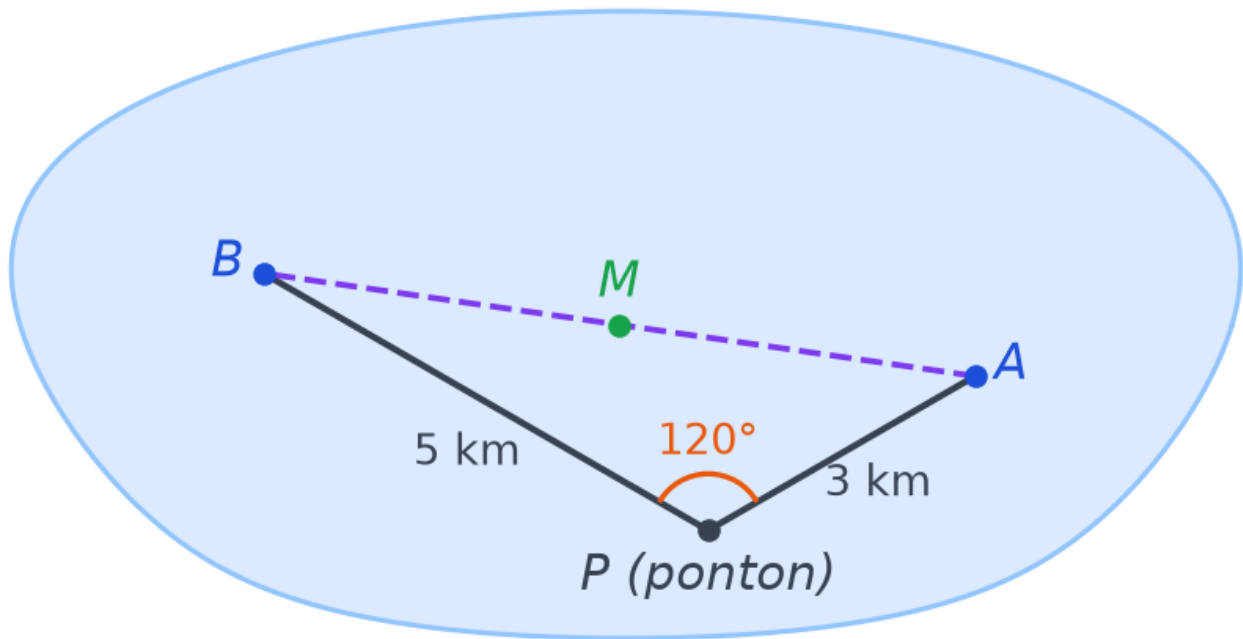
Exercice 3 - Un ensemble de points (3 points)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1;2)$ et $B(5;-6)$. On cherche alors l'ensemble Γ des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

1. Montre que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x^2 - 4x + y^2 + 4y - 17$. (1 point)
2. Vérifie que cette expression est égale à $(x-2)^2 + (y+2)^2 - 25$. Quelle est alors la nature de Γ ? Précise son centre et son rayon. (1 point)
3. Le point $E(5;2)$ appartient-il à Γ ? Qu'en déduis-tu donc pour le triangle AEB ? (1 point)

Exercice 4 - Deux bateaux sur le lac (4,5 points)

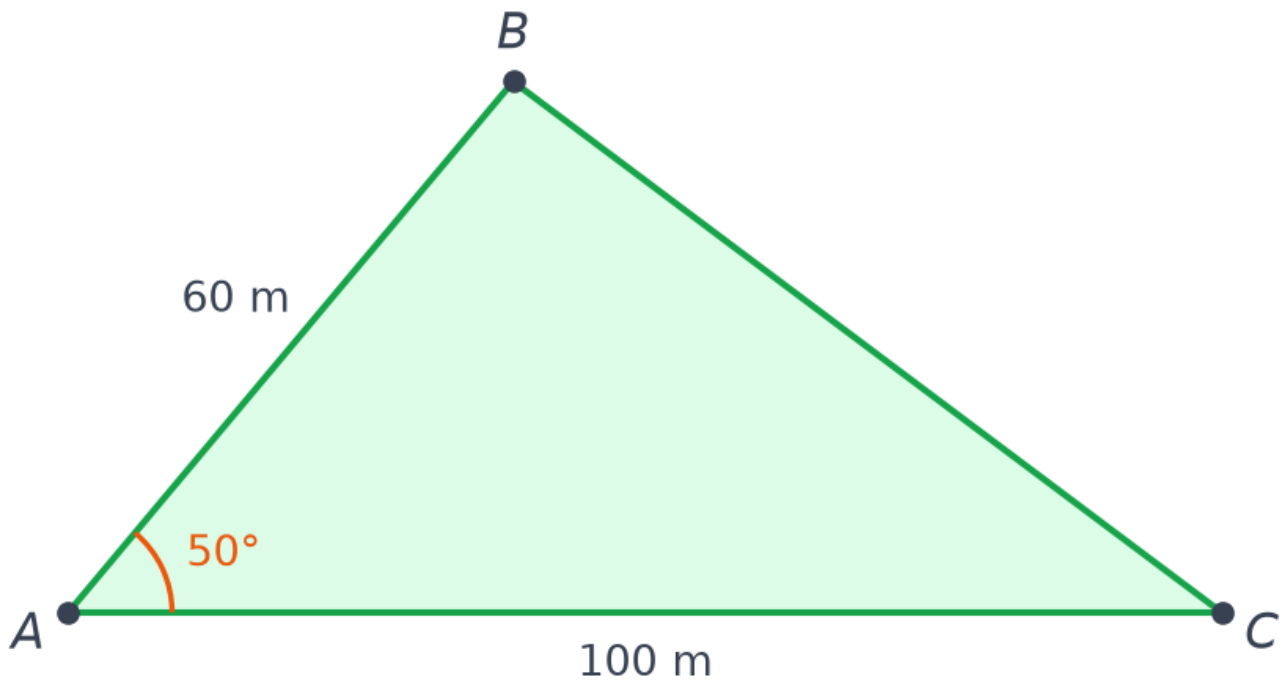
Depuis le ponton P , Clémence observe deux voiliers : le voilier A est à 3 km et le voilier B à 5 km. De plus, l'angle $\widehat{APB}$ mesure 120° . Enfin, une bouée M est ancrée au milieu de $[AB]$.



1. Calcule la distance AB entre les deux voiliers. (1,5 point)
2. Donne une mesure de l'angle $\widehat{PAB}$, arrondie au dixième de degré. (1 point)
3. Un canot de sécurité part de A et rejoint B en ligne droite à 14 km/h. Combien de minutes dure donc le trajet ? (0,5 point)
4. Calcule $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$. Ensuite, en utilisant $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$, calcule la distance PM entre le ponton et la bouée, au mètre près. (1,5 point)

Exercice 5 - La clôture du champ (4,5 points)

Monsieur Ferrand possède un champ triangulaire ABC tel que $AB = 60$ m, $AC = 100$ m et $\widehat{BAC} = 50^\circ$. Il veut ainsi entourer ce champ d'une clôture vendue 12 € le mètre.



1. Calcule la longueur BC , arrondie au dixième de mètre. (1,5 point)
2. Quel est alors le prix de la clôture, arrondi à l'euro ? (1 point)
3. Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC) . Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis déduis-en la distance AH au dixième de mètre. (1 point)
4. Monsieur Ferrand pense que l'angle du champ en B est droit. A-t-il raison ? Justifie par un calcul, car une lecture sur la figure ne suffit pas. (1 point)



Réviser théorème d'Al-Kashi et orthogonalité avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon produit scalaire dans le plan ; entraîne-toi sur la fiche produit scalaire dans le plan avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en première** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Produit scalaire et calculs d'angles : contrôle de maths en première
- Trigonométrie et produit scalaire : contrôle de maths en première
- Produit scalaire et géométrie repérée : contrôle de maths en première