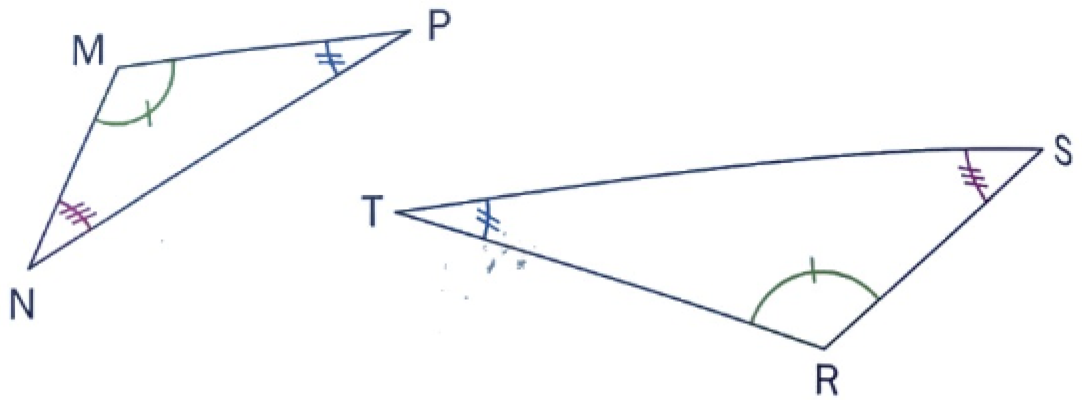
Triangles semblables

I. Triangles semblables

Définition

> Ce sont des triangles dont les angles sont égaux deux à deux.

Exemple :



$\widehat{P} = \widehat{T}$ et $\widehat{M} = \widehat{R}$ et $\widehat{N} = \widehat{S}$

donc les triangles MNP et RST sont semblables.

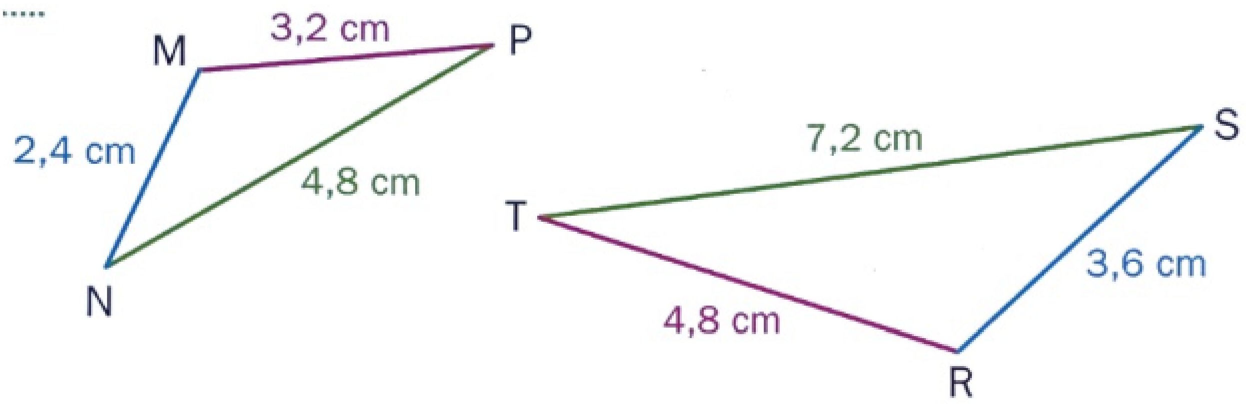
Les côtés [MN] et [RS] sont appelés "**côtés homologues**" (de même pour [MP] et [RT] puis, [PN] et [ST]).

Théorème :

> Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ces deux triangles semblables.

Exemple

.....



Remarque :

Pour remplir le tableau (ou calculer les rapports), il faut bien associer les côtés : chaque côté d'un triangle à un **homologue** dans l'autre.

Par exemple, le plus petit côté de RST est associé au plus petit côté de MNP.

Côtés du triangles MNP (en cm)	MN = 2,4	MP = 3,2	NP = 4,8
Côtés associés du triangle RST (en cm)	RS = 3,6	RT = 4,8	ST = 7,2

× 1,5

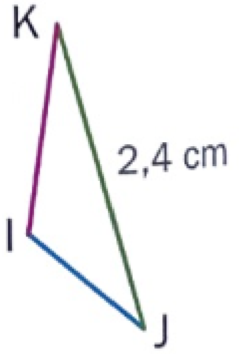
$\frac{RS}{MN} = \frac{3,6}{2,4} = 1,5$; $\frac{RT}{MP} = \frac{4,8}{3,2} = 1,5$; $\frac{ST}{NP} = \frac{7,2}{4,8} = 1,5$.

Tous les rapports sont égaux donc ce tableau est un tableau de proportionnalité et le coefficient de proportionnalité est $a = 1,5$.
Par conséquent, MNP et RST sont semblables.

Théorème :

> Réciproquement, si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Exemple :



On sait que le triangle IJK ci-dessus est semblable au triangle RST de l'exemple précédant.

IJK et RST sont semblables donc il existe un coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir les longueurs des côtés du triangle IJK à partir de celles des côtés du triangle RST.

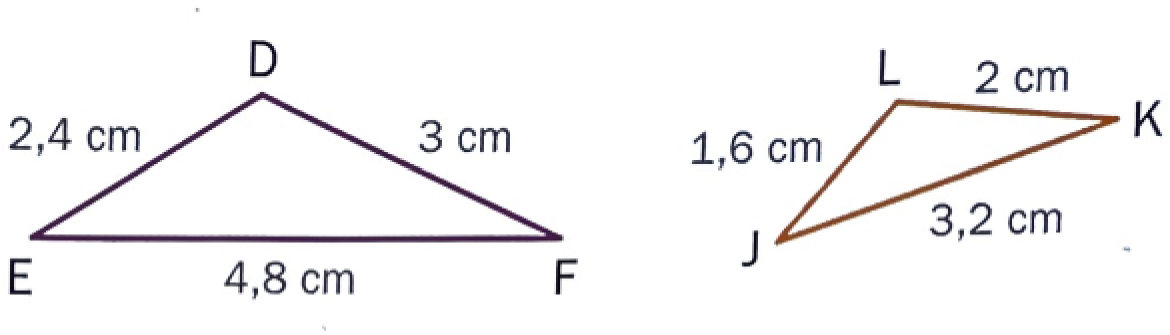
Ce coefficient vaut $\frac{KJ}{TS} = \frac{2,4}{7,2} = \frac{1}{3}$

Le triangle IJK est une réduction du triangle RST de rapport $\frac{1}{3}$.

II. Démontrer que deux triangles sont semblables

Application :

> Démontrer que DEF et JKL ci-dessous sont semblables.



Solution :

Côtés du triangle DEF (en cm)	2,4	3	4,8
Côtés associés du triangle JKL (en cm)	1,6	2	3,2

Pour bien associer les côtés, on peut les classer du plus petit au plus grand.

$\frac{JL}{ED} = \frac{1,6 \times 10}{2,4 \times 10} = \frac{16:8}{24;8} = \frac{2}{3}$; $\frac{LK}{DF} = \frac{2}{3}$; $\frac{JK}{EF} = \frac{3,2 \times 10}{4,8 \times 10} = \frac{32:16}{48;16} = \frac{2}{3}$.

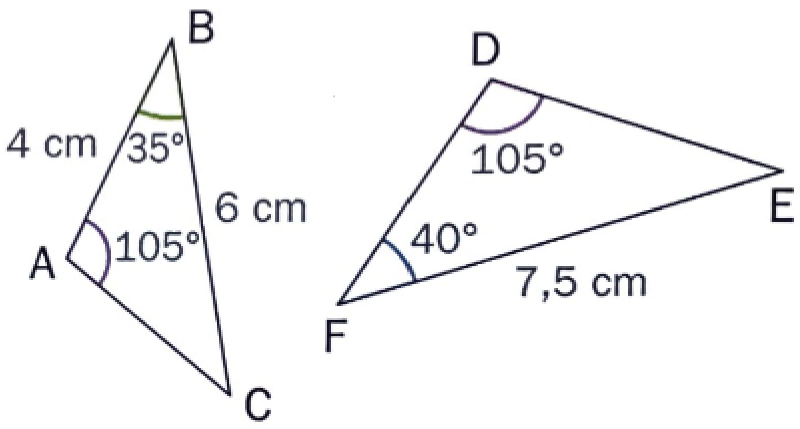
Tous les rapports sont égaux donc ce tableau est un tableau de proportionnalité et le coefficient de proportionnalité est $a = \frac{2}{3}$.

Les longueurs des côtés des triangles DEF et JKL sont proportionnelles donc DEF et JKL sont semblables.

III. Calculer une longueur en utilisant les propriétés

Application :

> a. Justifier que les triangles ABC et DEF ci-dessus sont semblables.
> b. En déduire la longueur ED.



Solution :
a. $\widehat{C} = 180° - (35° + 105°) = 40°$
$\widehat{E} = 180° - (40° + 105°) = 35°$

Les angles homologues des triangles ABC et DEF sont égaux deux à deux.

Par définition, ABC et DEF sont semblables.

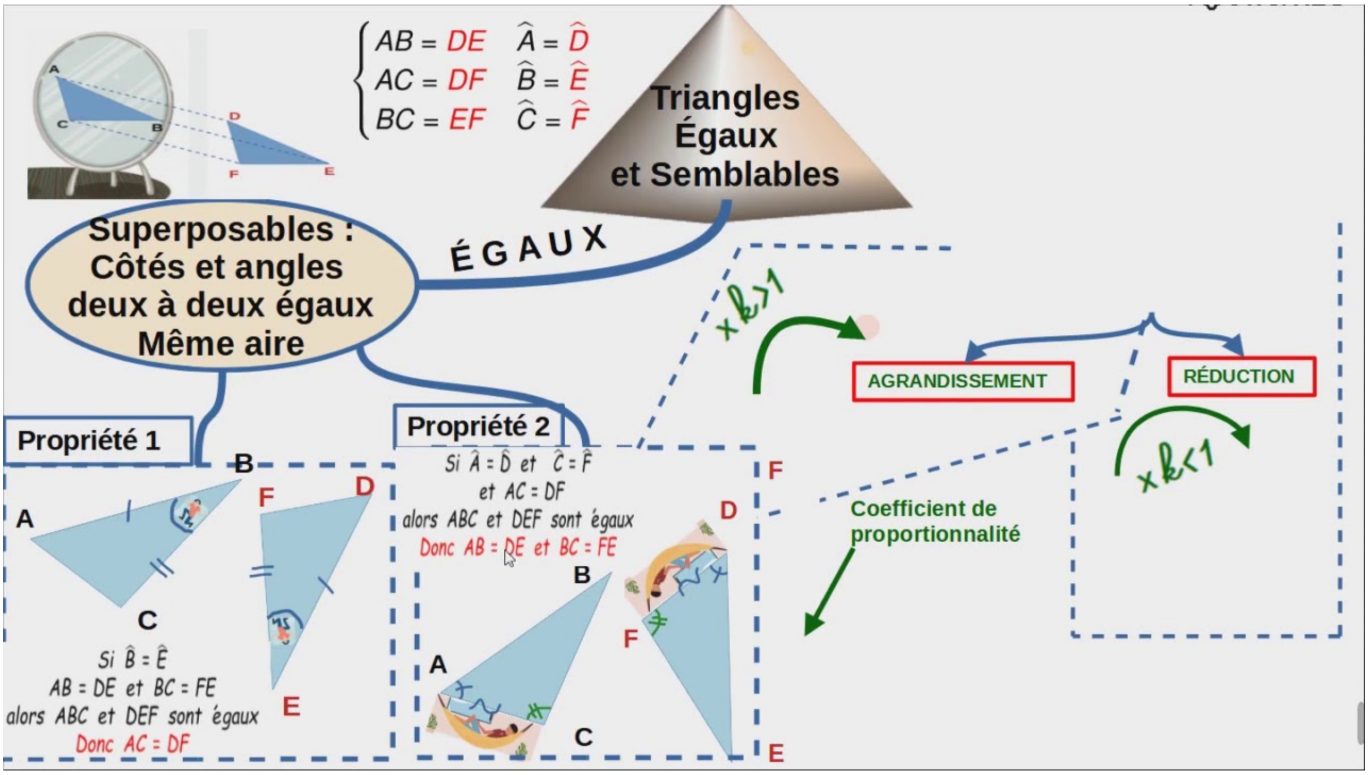
b. ABC et DEF sont semblables donc les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Côtés du triangle ABC (en cm)	BA = 4	BC = 6
Côtés associés du triangle DEF (en cm)	ED	EF = 7,5

C'est un tableau de proportionnalité, en utilisant la règle du produit en croix, nous avons :

$$ED = \frac{4 \times 7,5}{6} = 5\,cm.$$

IV. Carte mentale



Triangles
Égaux
et Semblables
AB = DE   Â = D̂
AC = DF   B̂ = Ê
BC = EF   Ĉ = F̂
Superposables :
Côtés et angles
deux à deux égaux
Même aire
ÉGAUX
Propriété 1
Si B̂ = Ê
AB = DE et BC = FE
alors ABC et DEF sont égaux
Donc AC = DF
Propriété 2
Si Â = D̂ et Ĉ = F̂
et AC = DF
alors ABC et DEF sont égaux
Donc AB = DE et BC = FE
x k>1
AGRANDISSEMENT
RÉDUCTION
x k<1
Coefficient de
proportionnalité