

Trigonométrie et produit scalaire

Ce qu'évalue le contrôle : trigonométrie et produit scalaire

L'essentiel du sujet

- Niveau **première**
- Durée **1 heure**
- Calculatrice **interdite**
- Barème **sur 20**

Chapitres : Trigonométrie et Produit scalaire (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Utiliser les valeurs remarquables du cosinus et du sinus pour calculer des produits scalaires
- Déterminer un angle en radians à partir du produit scalaire et des normes
- Appliquer le théorème d'Al-Kashi dans un triangle ayant un angle de $2\pi/3$
- Calculer le travail d'une force comme produit scalaire dans une situation concrète

Avant de commencer

Avant de commencer, dessine un **cercle trigonométrique** au brouillon avec les angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$: il sert dans tous les exercices. Ensuite, choisis la bonne formule du produit scalaire selon les données, **coordonnées ou normes et angle**. Surveille surtout le **signe du cosinus** quand l'angle dépasse $\frac{\pi}{2}$. Enfin, vérifie qu'un angle trouvé appartient bien à $[0; \pi]$.

Le sujet du contrôle : trigonométrie et produit scalaire

Exercice 1 - Valeurs remarquables en action (4 points)

Dans cet exercice d'automatismes, aucune justification longue n'est attendue, mais chaque résultat doit être exact et simplifié.

1. Donne la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{3})$, $\sin(\frac{5\pi}{6})$, $\cos(-\frac{\pi}{4})$ et $\cos(\frac{7\pi}{6})$. (1 point)
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ et forment un angle de $\frac{\pi}{3}$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$. (0,5 point)
3. Même question avec $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$ et un angle de $\frac{3\pi}{4}$. (0,5 point)
4. Puis avec $|\vec{u}| = \sqrt{3}$, $|\vec{v}| = 2$ et un angle de $\frac{5\pi}{6}$. (0,5 point)
5. Deux vecteurs non nuls ont un produit scalaire nul. Quelle est alors la mesure de leur angle géométrique ? (0,5 point)
6. Trouve enfin le réel θ de l'intervalle $[0; \pi]$ tel que $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. (1 point)

Exercice 2 - Des angles grâce aux coordonnées (4 points)

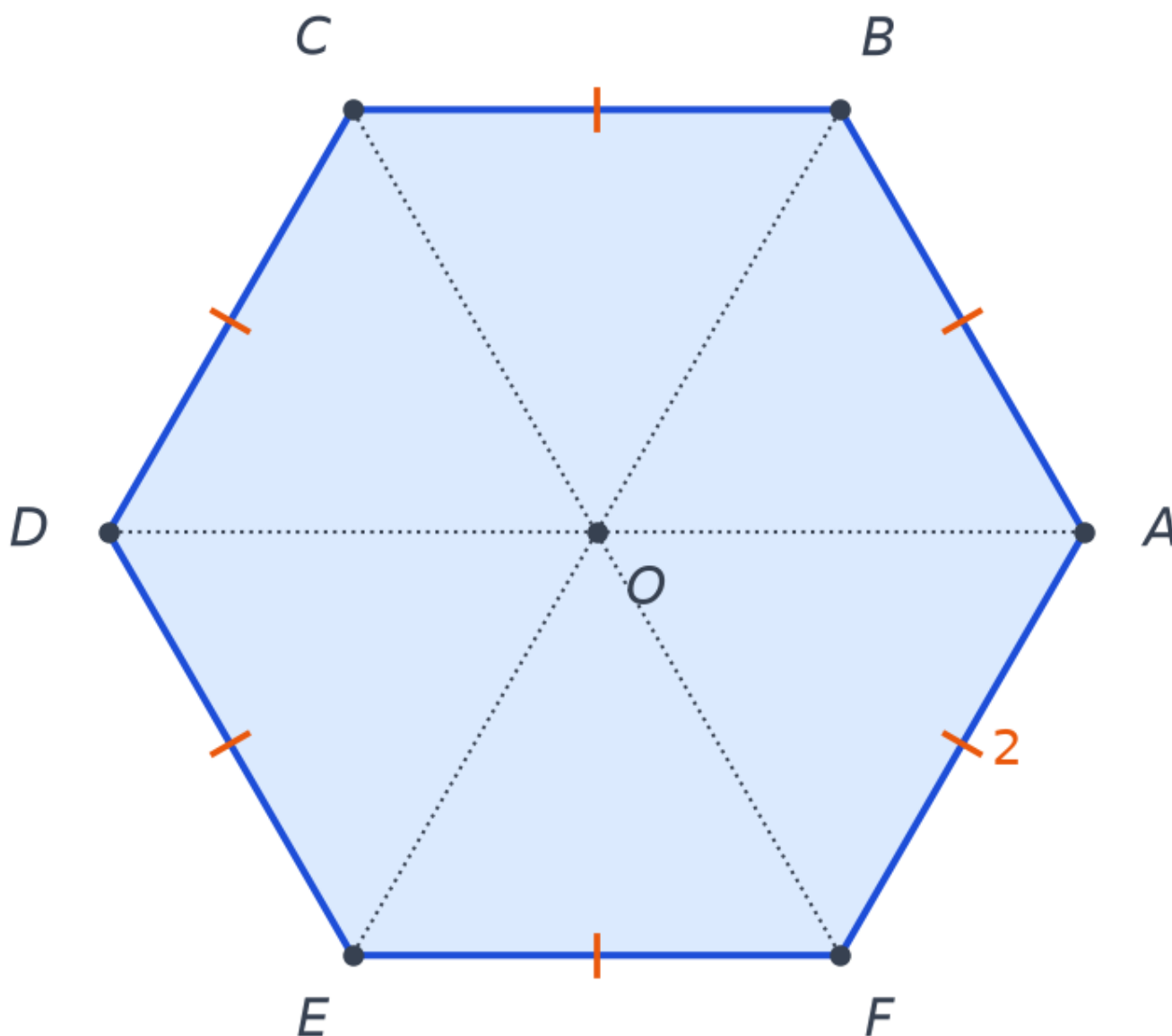
Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}(3;1)$, $\vec{v}(1;2)$, $\vec{w}(-1;3)$ et $\vec{t}(-2;1)$. On note ensuite θ l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Calcule d'abord $\vec{u} \cdot \vec{v}$ à l'aide des coordonnées. (0,5 point)
2. Calcule ensuite $|\vec{u}|$ et $|\vec{v}|$. (1 point)

3. Déduis-en $\cos\theta$, puis la mesure de θ en radians. (1 point)
4. Détermine de même l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{t}$. (1 point)
5. Sans calculer de norme, montre que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ forment un angle droit. (0,5 point)

Exercice 3 - L'hexagone régulier (3 points)

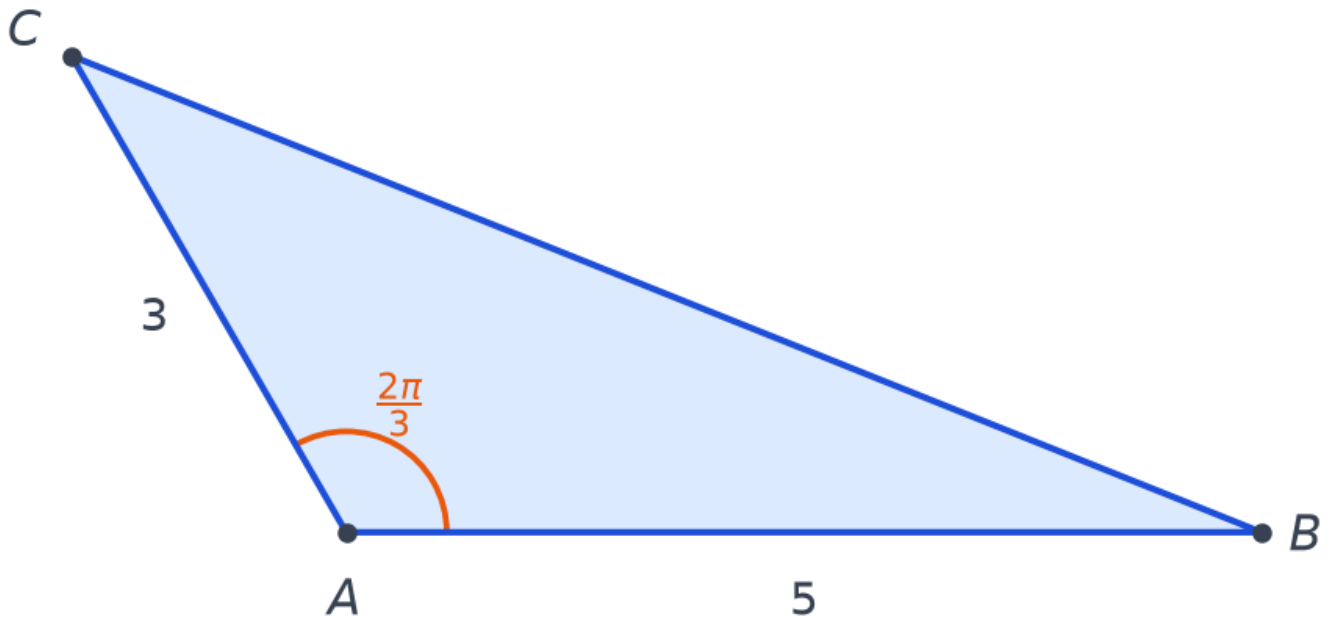
L'hexagone $ABCDEF$ ci-dessous est régulier, de centre O et de côté 2. Ainsi, les six triangles OAB , OBC , ..., OFA sont équilatéraux.



1. Donne les mesures des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$ et $\widehat{AOD}$ en radians, puis calcule $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$. (1,5 point)
2. Sachant que l'angle $\widehat{FAB}$ mesure $\frac{2\pi}{3}$, calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$. (1 point)
3. Compare les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED}$, puis déduis-en $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$. (0,5 point)

Exercice 4 - Un triangle obtus (4 points)

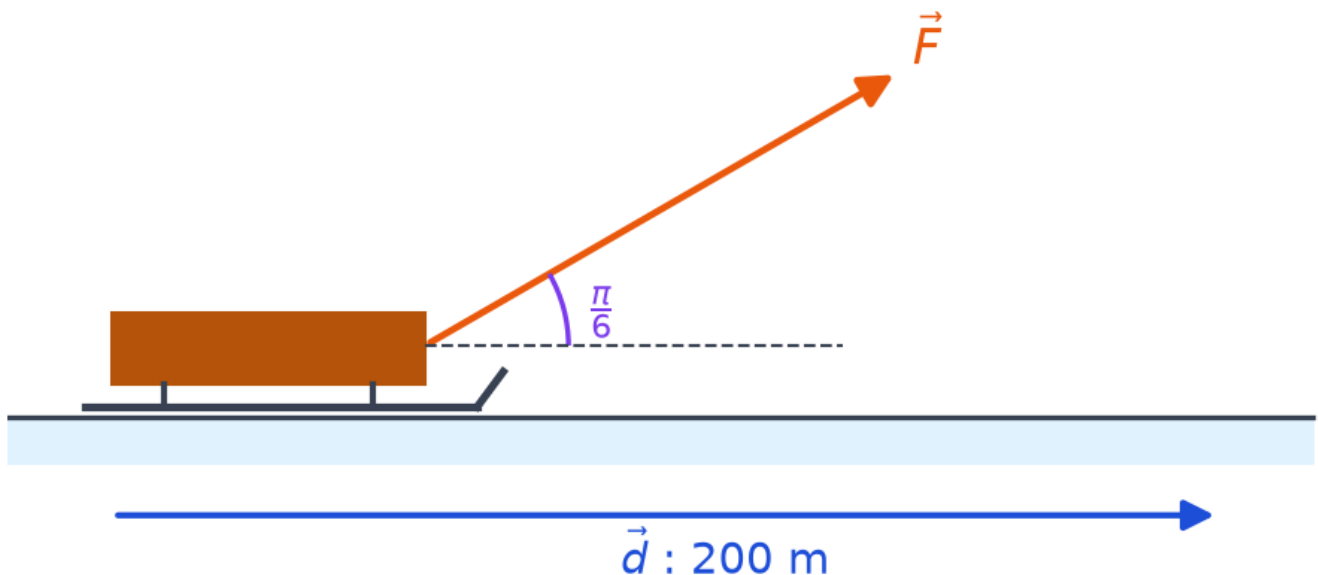
Dans le triangle ABC ci-dessous, on a $AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.



1. Calcule tout d'abord $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. (1 point)
2. À l'aide du théorème d'Al-Kashi, montre que $BC = 7$. (1,5 point)
3. En utilisant $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$, démontre que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2)$, puis calcule sa valeur. (1 point)
4. L'angle $\widehat{ABC}$ est-il aigu ou obtus ? Justifie, car un simple coup d'œil sur la figure ne suffit pas. (0,5 point)

Exercice 5 - Le traîneau de Maëlle (5 points)

Maëlle tire son traîneau sur une piste horizontale rectiligne de 200 m. Pour cela, elle exerce, par une corde, une force $\vec{F}$ d'intensité 50 N qui fait un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec la piste. En physique, le travail de la force pendant le déplacement $\vec{d}$ vaut $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$, exprimé en joules (J). On donne $\sqrt{3} \approx 1,732$ et $\sqrt{2} \approx 1,414$.



1. Calcule la valeur exacte du travail W_1 de la force de Maëlle, puis une valeur approchée à l'unité. (1,5 point)
2. Son frère Timéo tire le même traîneau sur la même distance, avec une force de 80 N inclinée de $\frac{\pi}{3}$. Calcule le travail W_2 de sa force. (1 point)
3. Qui fournit donc le plus grand travail ? (0,5 point)
4. Avec une corde inclinée de $\frac{\pi}{4}$, quelle force faudrait-il exercer pour obtenir le même travail que Timéo ? Donne la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième. (1 point)
5. Maëlle garde une force de 50 N. Quel angle α de $[0; \frac{\pi}{2}]$ donnerait alors un travail de 5 000 J ? (1 point)



Réviser trigonométrie et produit scalaire avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon fonctions trigonométriques puis produit scalaire dans le plan ; entraîne-toi sur la fiche angles orientés et trigonométrie et produit scalaire dans le plan avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en première** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Cercle trigonométrique et radians : contrôle de maths en première
- Fonctions cosinus et sinus : contrôle de maths en première
- Produit scalaire et calculs d'angles : contrôle de maths en première
- Théorème d'Al-Kashi et orthogonalité : contrôle de maths en première
- Produit scalaire et géométrie repérée : contrôle de maths en première