Variable aléatoires

Les **variables aléatoires réelles et les probabilités** à travers un cours de maths en 1ère à télécharger en PDF. Dans cette leçon, l'élève devra connaître la définition d'une variable aléatoire, d'un événement et d'un univers. Développer des compétences en calculant l'espérance, la variance et l'écart-type et appliquer les propriétés des indicateurs en première.

I. Variables aléatoires réelles

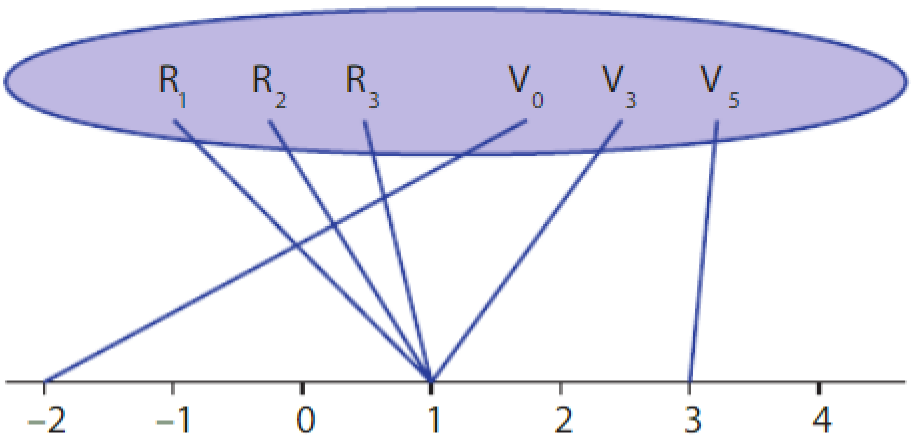
On considère une expérience aléatoire dont l'univers $\Omega = \{ e_1; e_2; ....; e_r \}$ est fini et une loi de probabilité p sur Ω.
Définition : variable aléatoire réelle (discrète).

> Une variable aléatoire réelle X sur Ω est une fonction qui chaque issue de Ω associe un nombre réel.

Notation :

a étant un nombre réel, on note $\{ X = a \}$ l'événement "X prend la valeur de a" et $p(X = a)$ sa probabilité.

Exemple :



Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : trois boules sont rouges numérotées de 1 à 3 (R_1, R_2, R_3) et trois boules sont vertes numérotées 0,3 et 5 (V_0, V_3, V_5).
Un joueur mise 2 € et tire une boule au hasard. Si elle est rouge, il gagne 3 ; si elle est verte, il gagne en euros la valeur du numéro indiqué.

L'univers associé à l'expérience aléatoire est $\Omega = \{ R_1, R_2, R_3, V_0, V_3, V_5 \}$.

Toutes les issues sont équiprobables.
La variable aléatoire X qui, à chaque boule choisie, associe le gain en tenant compte de la mise, peut
prendre comme valeur : 3 (en prenant la boule V_5 et en soustrayant la mise) ; 1 (en prenant une boule rouge ou la boule V_3 et en soustrayant la mise) et-2 (en prenant la boule V_0 et en soustrayant la mise).
L'événement « X Prend la valeur 3 », noté$\{ X = 3 \}$, est réalisé lorsque le joueur tire la boule V_5.
Sa probabilité est $p(X = 3) = \frac{1}{6}$ car la probabilité de tirer au hasard la boule V_5 est $\frac{1}{6}$.
Définition :

> Soit X une variable aléatoire sur Ω prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
> Lorsqu'à chaque valeur x_i, on associe la probabilité $p_i = p(X = x_i)$, on définit la loi de probabilité de X.

Remarques :
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut se présenter sous la forme d'un tableau.
• La somme des probabilités de toutes valeurs prises par la variable aléatoire est égale 1.

On a : $p_l + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemple :
Dans l'exemple précédent, X peut prendre les valeurs 3, 1 et —2. De plus, on a :

$$p(X = 3) = p(\{ V_5 \}) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 1) = p(\{ R_1; R_2; R_3; V_3; \}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$p(X = -1) = p(\{ V_0 \}) = \frac{1}{6}$$

On en déduit que la loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	-2	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Remarques :
Les notations $\{ X \geq a \}$, $\{ X = a \}$, ..., permettent de définir des événements en lien avec les variables aléatoires.
Dans l'exemple, on peut calculer la probabilité de l'événement $\{ X \geq 0 \}$, c'est-à-dire la probabilité que le gain soit positif, que l'on note $p(X \geq 0)$: on a
$p(X \geq 0) = p(X = 1) + p(X = 3) = \frac{5}{6}$.

II. Espérance — Variance — Écart-type

1.Définitions et vocabulaire

Dans ce paragraphe, X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Définition : espérance.

L'espérance de X est le nombre réel noté E(X) défini par :
$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$.

Exemple :
On considère une variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

y_i	-4	0	4	20
$p(Y = y_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

On a : $E(Y) = 0,5 \times \ (-4) + 0,2 \times \ 0 + 0,2 \times \ 4 + 0,1 \times \ 20 = 0,8$

Remarques :
• Lorsque X est une variable aléatoire donnant le gain algébrique à un jeu, E(X) est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties à ce jeu.
• un jeu est équitable si l'espérance de la variable aléatoire donnant le gain algébrique est nulle.
Définition : variance.

La variance de X est le nombre réel noté V(X) défini par :
$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2$.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, on a :

$V(Y) = 0,5 \times \ (-4 - 0,8)^2 + 0,2 \times \ (0 - 0,8)^2 + 0,2 \times \ (4 - 0,8)^2 + 0,1 \times \ (20 - 0,8)^2 = 50,56$
Définition : écart-type.

L'écart-type de X est le nombre réel, noté $\sigma\,(X)$ défini par $\sigma\,(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, on a : $\sigma\,(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{50,56} \approx \ 7,11$

Remarques :
• Ces définitions sont à mettre en lien avec celles de moyenne, variance et écart-type d 'une série statistique. On peut donc aussi utiliser la calculatrice ou un tableur pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire si on a résumé la loi de probabilité de la variable aléatoire dans un tableau.
• Comme en statistiques, l'écart-type permet de se donner une idée de la répartition des valeurs prises par une variable autour de son espérance en tenant compte des probabilités. Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs prises par la variable aléatoire sont " éloignées" de l'espérance.

2.Propriétés des indicateurs

Propriété : Formule de König-Huygens.

On a : $V(X) = p_1(x_1)^2 + p_2(x_2)^2 + ... + p_n(x_n)^2 - (E(X))^2$.

Définitions : Variable aléatoire aX + b.

Pour tous nombres réels a et b, on peut définir une nouvelle variable aléatoire en associant à chaque
issue donnant la valeur x_i, le nombre réel $ax_i + b$.
Cette nouvelle variable aléatoire se note aX + b.

Exemple :
Z est une variable aléatoire donnant le gain en euros à un jeu auquel on gagner 2, 4 ou 8 €.

Z Peut donc prendre les valeurs 2, 4 ou 8.
Les organisateurs décident de multiplier les gains par 2 puis de soustraire 1 €.
On obtient alors la variable aléatoire Z' telle que Z' = 2Z— 1 , qui donne les gains en euros suite à cette modification.
Z' peut prendre les valeurs $3\,(2\ \times\ 2-\ 1)\,;\,7\,(2\ \times\ 4-1)\ ou\ 15\,(2\ \times\ 8-1)$.
Propriété : E(aX + b) et V(aX + b).

> Soit a et b deux nombres réels.On a :
> $E(aX+b)=aE(X)+b$
> $V(aX+b)=a^2V(X)$.
> $\sigma\,(aX+b)=\ |a\ |\sigma\,(X)$

Démonstration :

Pour l'espérance :

$$E(aX+b)=p_1\times\ (ax_1+b)+p_2\times\ (ax_2+b)+\ldots+p_n\times\ (ax_n+b)$$
$$E(aX+b)=ap_1x_1+p_1b+ap_2x_2+p_2b+\ldots+ap_nx_n+p_nb$$
$$E(aX+b)=a(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n)+b(p_1+p_2+\ldots+p_n)$$
$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

car $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$.

Remarque :

Voir les exercices d'approfondissement pour la propriété de la variance (et donc de

Exemple :
Dans l'exemple précédent, si on a $E(Z)\ =\ 3{,}4$ alors :

$$E(Z')=E(2Z-1)=2E(Z)-1=2\times\ 3{,}4-1=5{,}8$$
Propriété : espérance et simulation.

> Lorsque l'on crée un échantillon, de taille suffisamment grande, de valeurs prises par une variable
> aléatoire (lors de simulations par exemple) la moyenne des valeurs de cet échantillon est proche de la
> valeur de l'espérance de cette variable aléatoire.

Remarque :

Le tableur et Python permettent de faire des simulations et d'obtenir au hasard une valeur prise par une variable aléatoire.