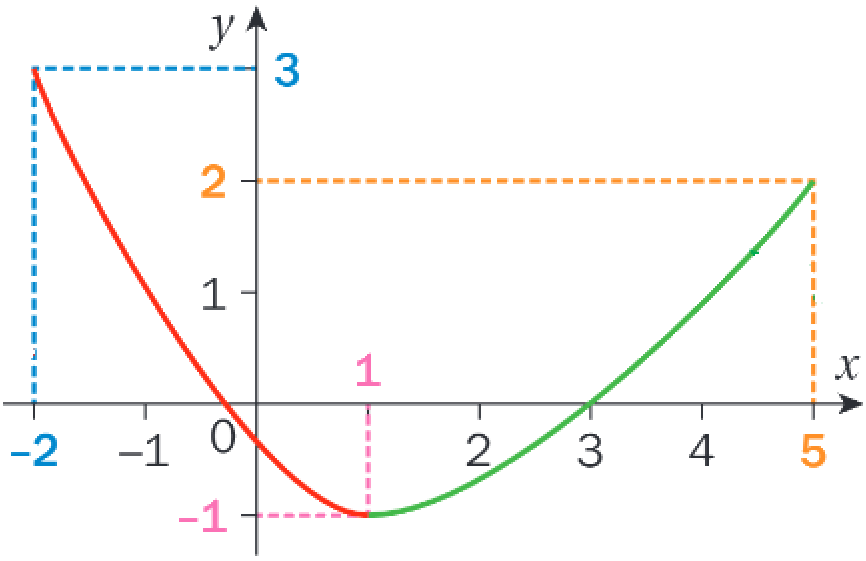
Variations d'une fonction

I. Comportement d'une fonction définie par sa courbe représentative

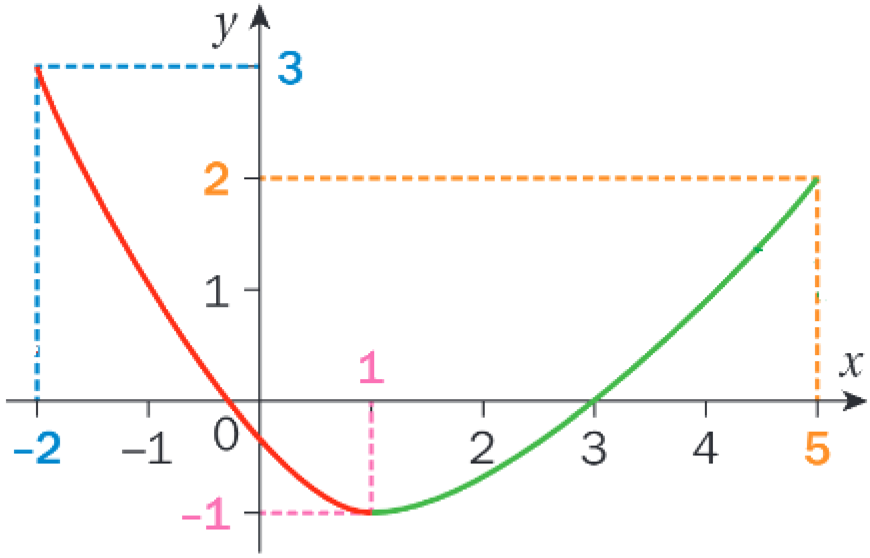
Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère une fonction f définie sur l'intervalle [-2;5].



Sur l'intervalle [-2;1], les images sont décroissantes, on dit que la **fonction f est décroissante** sur [-2;1].

Sur l'intervalle [1;5], les images sont croissantes, on dit que la **fonction f est croissante** sur [1;5].

Les variations de la fonction f peuvent être synthétisée dans un **tableau de variation** :



Remarque :

Si une fonction f est constante sur un intervalle [a;b] alors la flèche, dans le tableau de variation, sera horizontale.

II. Tracer la courbe d'une fonction à partir de son tableau de variation

On considère une fonction f définie sur l'intervalle [-4,2] et son tableau de variation ci-dessous :

x	-4		-1		0		2
Variations de f	-1	↘	-2	↗	1	↘	-3

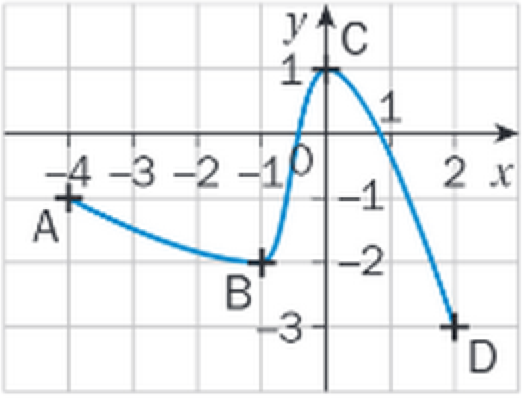
En exploitant ce tableau de variation, nous pouvons en déduire que :

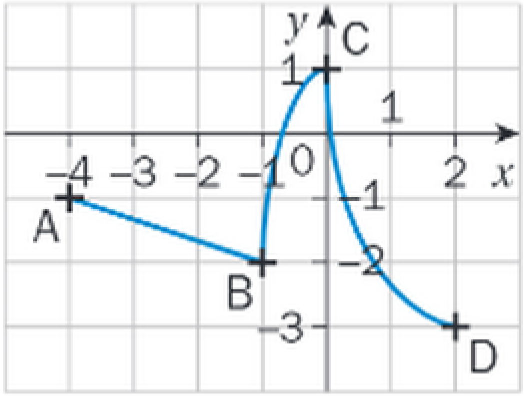
- f est décroissante sur l'intervalle [-4;-1];
- f est croissante sur l'intervalle [-1;0];
- f est décroissante sur l'intervalle [0;2];

La courbe passe également par les points suivants : A(-4;-1) ; B(-1;-2); C(0;1); D(2;-3).

Cependant, nous disposons pas suffisamment d'informations pour tracer de manière très précise la courbe de cette fonction f mais nous pouvons obtenir un tracé et une allure très proche de la courbe de cette fonction.

Voici deux courbes représentatives possibles pour cette fonction f :





III. Exploitation des variations d'une fonction

1.Fonction croissante ou décroissante sur un intervalle

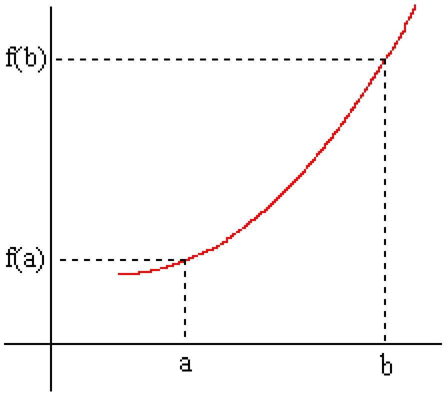
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est **strictement croissante** sur I équivaut à dire que pour tout a, b de I :

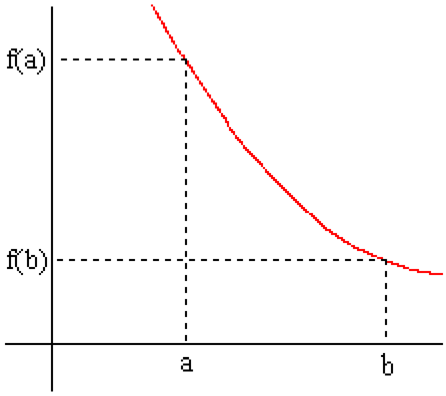
Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

f est **strictement décroissante** sur I équivaut à dire que pour tout a,b de I :

Si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$



Fonction croissante sur I



Fonction décroissante sur I

Propriété :

On considère l'intervalle [A;B] avec a et b deux nombres réels tels que a<b.

- Si f est une **fonction croissante** sur [a;b] alors pour tout $x \in [a;b]$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
- Si f est une **fonction décroissante** sur [a;b] alors pour tout $x \in [a;b]$, $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

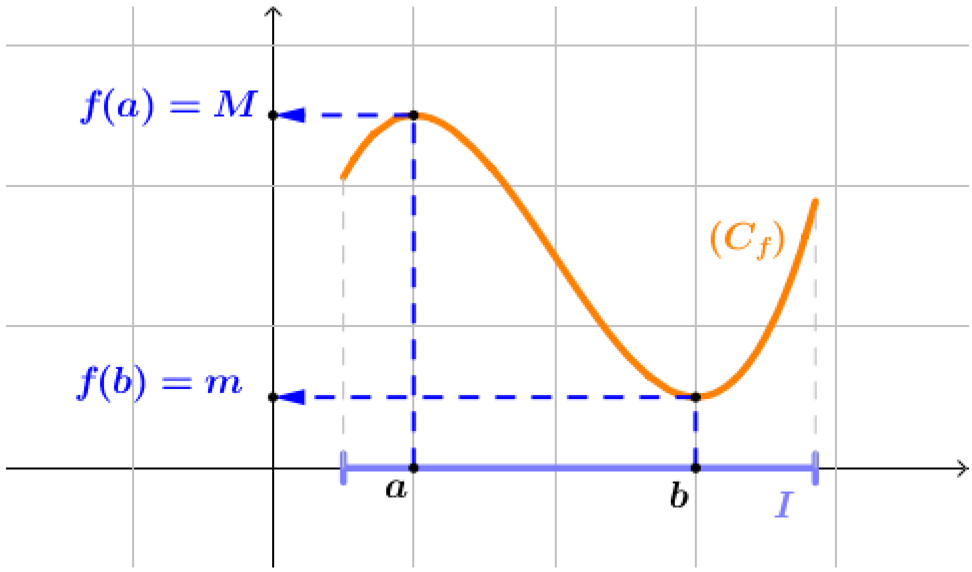
2.Notion d'extremum

Définition :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.

Soient $a \in, I$, $b \in, I$ tels que a<b et deux points de la courbe tels que A(a;f(a)) et B(b,f(b)) avec M=f(a) et m=f(b).

- M est le **maximum** de la fonction f sur I si et seulement pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
- m est le **minimum** de la fonction f sur I si et seulement pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.



Exemple :

On considère une fonction f définie sur l'intervalle [-5;3].

x	-5		-2		$0,5$		2		3
Variations de f	1	↗	4	↘	-1	↗	$2,5$	↘	$1,5$

En exploitant ce tableau de variation, nous pouvons en déduire que :

- f est croissante sur l'intervalle [- 5 ; - 2];
- f est décroissante sur l'intervalle [- 2 ; 0,5];
- f est croissante sur l'intervalle [0,5 ; 2];
- f est décroissante sur l'intervalle [2 ; 3];
- 4 est le maximum de f sur [- 5 ; 3] et il est atteint en x = - 2;
- - 1 est le minimum de f sur [- 5 ; 3] et il est atteint en x = 0,5;