

Variations et extremums d'une fonction

Ce qu'évalue le contrôle : variations et extremums d'une fonction

L'essentiel du sujet

- Niveau **première**
- Durée **1 heure 30 minutes**
- Calculatrice **interdite**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Variations d'une fonction (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Déduire le sens de variation d'une fonction du signe de sa dérivée
- Dresser le tableau de variations complet d'un polynôme de degré 3 et d'une fonction rationnelle
- Déterminer les extremums locaux et globaux d'une fonction sur un intervalle
- Compter les solutions d'une équation $f(x) = k$ à l'aide d'un tableau de variations
- Reconnaître une fonction paire ou impaire par le calcul de $f(-x)$ et sur sa courbe

Avant de commencer

Pour chaque étude, suis toujours le même ordre : calcul de la dérivée, **factorisation**, tableau de signes, puis tableau de variations. Une dérivée bien factorisée donne en effet son signe

presque sans effort. Calcule ensuite les images aux bornes et aux points où la dérivée s'annule, car ce sont elles qui fournissent les **extremums**. Enfin, relis chaque flèche : elle doit monter quand la dérivée est positive et **descendre** quand elle est négative.

Le sujet du contrôle : variations et extremums d'une fonction

Exercice 1 - Du signe de la dérivée aux variations (3 points)

Les trois questions sont indépendantes. Réponds en justifiant brièvement.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$. Donne d'abord ses variations, puis son extremum. (1 point)
2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^3 + 5$. Montre que g est décroissante sur $\mathbb{R}$. (1 point)
3. Une fonction h , dérivable sur $\mathbb{R}$, a pour dérivée $h'(x) = (3-x)(x+1)$. Dresse le tableau de signes de $h'(x)$, puis déduis-en les variations de h et la nature de ses extremums locaux. (1 point)

Exercice 2 - Un polynôme de degré 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3;5]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

1. Calcule $f'(x)$, puis vérifie que $f'(x) = 3(x-3)(x+1)$. (1 point)
2. Étudie ensuite le signe de $f'(x)$ sur $[-3;5]$. (1 point)
3. Dresse le tableau de variations complet de f , avec les images calculées. (1,5 point)

4. Donne alors le maximum et le minimum de f sur $[-3;5]$, ainsi que les valeurs où ils sont atteints. (0,5 point)
5. Sans résoudre, détermine le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-3;5]$, puis celui de $f(x) = 12$. (1 point)

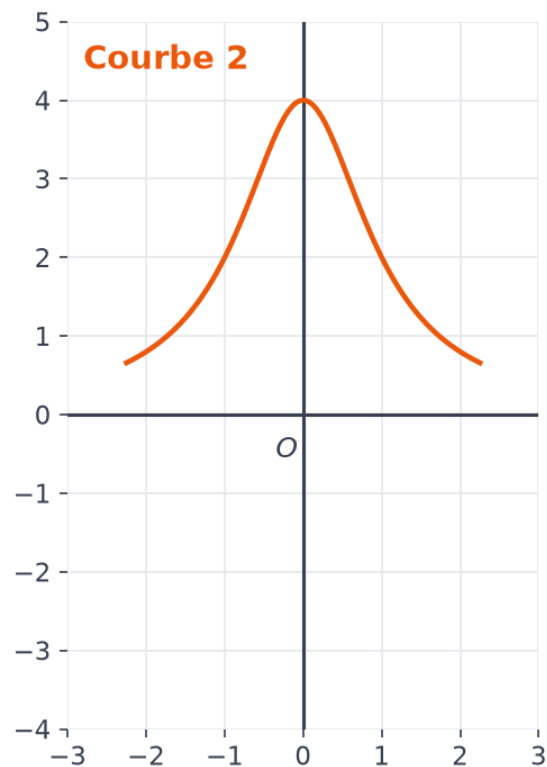
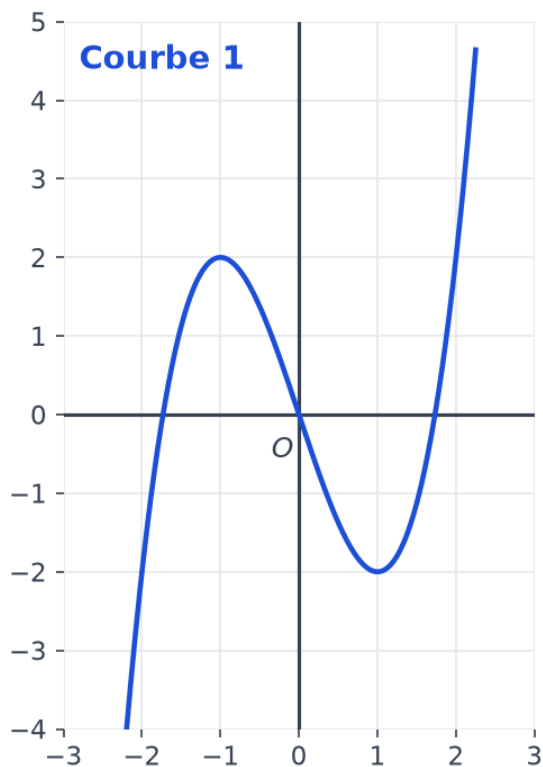
Exercice 3 - Une fonction rationnelle (4 points)

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2+4}{x}$.

1. Montre que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$. (1,5 point)
2. Dresse ensuite le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$. (1 point)
3. Déduis-en le minimum de g , puis démontre que, pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{4}{x} \geq 4$. (1 point)
4. Combien l'équation $g(x) = 5$ a-t-elle de solutions ? Vérifie ta réponse en la résolvant. (0,5 point)

Exercice 4 - Paire, impaire ou aucune des deux (3,5 points)

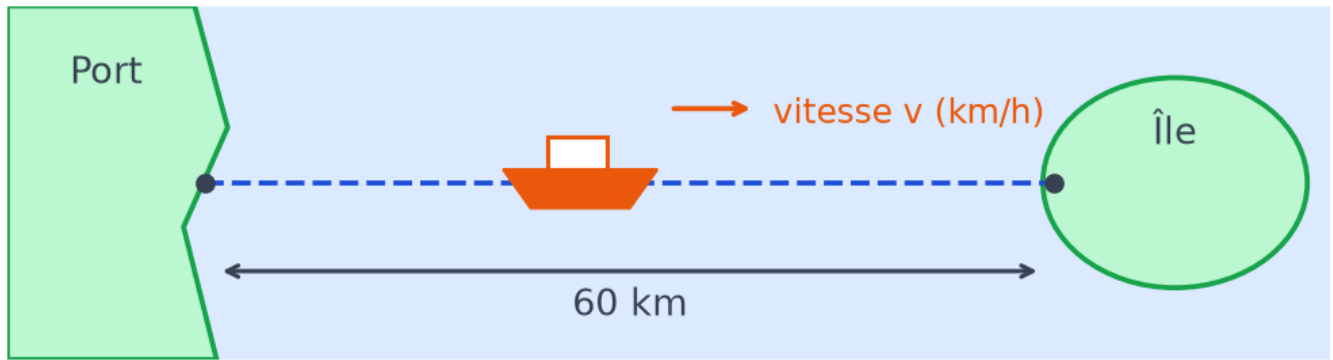
Les deux courbes ci-dessous représentent des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.



1. Laquelle représente une fonction paire, et laquelle une fonction impaire ? Justifie par une symétrie. (1 point)
2. Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, dis si elle est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre : $u(x) = x^3 - 5x$, $v(x) = 3x^4 - x^2 + 2$ et $w(x) = x^2 + x$. (1,5 point)
3. Une fonction k est impaire sur $\mathbb{R}$, avec $k(2) = 5$. Que valent $k(-2)$ et $k(0)$? Justifie. (1 point)

Exercice 5 - La vitesse de la navette (4,5 points)

Une navette relie un port à une île située à 60 km. Sa vitesse v , en km/h, est comprise entre 10 et 40. Quand elle navigue à la vitesse v , son coût de fonctionnement est de $400 + v^2$ euros par heure. L'armateur, Mme Lefèvre, cherche donc la vitesse qui rend le trajet le moins cher.



1. Justifie que la durée du trajet est $\frac{60}{v}$ heures, puis que son coût est $C(v) = \frac{24000}{v} + 60v$. (1 point)
2. Montre que, pour tout v de $[10;40]$, $C'(v) = \frac{60(v-20)(v+20)}{v^2}$. (1,5 point)
3. Dresse alors le tableau de variations de C sur $[10;40]$. (1 point)
4. Quelle vitesse Mme Lefèvre doit-elle choisir ? Donne enfin le coût minimal et la durée du trajet correspondante. (1 point)



Réviser variations et extremums d'une fonction avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, entraîne-toi sur la fiche fonctions usuelles avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en première** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Position relative de deux courbes : contrôle de maths en première
- Nombre dérivé et équation de tangente : contrôle de maths en première
- Dérivées et approximation affine : contrôle de maths en première