

Vecteurs et plans de l'espace

Ce qu'évalue le contrôle : vecteurs et plans de l'espace

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **2 heures**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Droites et plans de l'espace (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Simplifier une somme de vecteurs de l'espace avec la relation de Chasles dans un cube
- Décomposer un vecteur dans une base et en déduire l'alignement de trois points
- Lire les coordonnées des sommets et des milieux d'un cube dans un repère lié à ce cube
- Déterminer la section d'un cube par un plan et la position relative d'une droite et d'un plan
- Prouver que deux droites sont coplanaires puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection

Avant de commencer

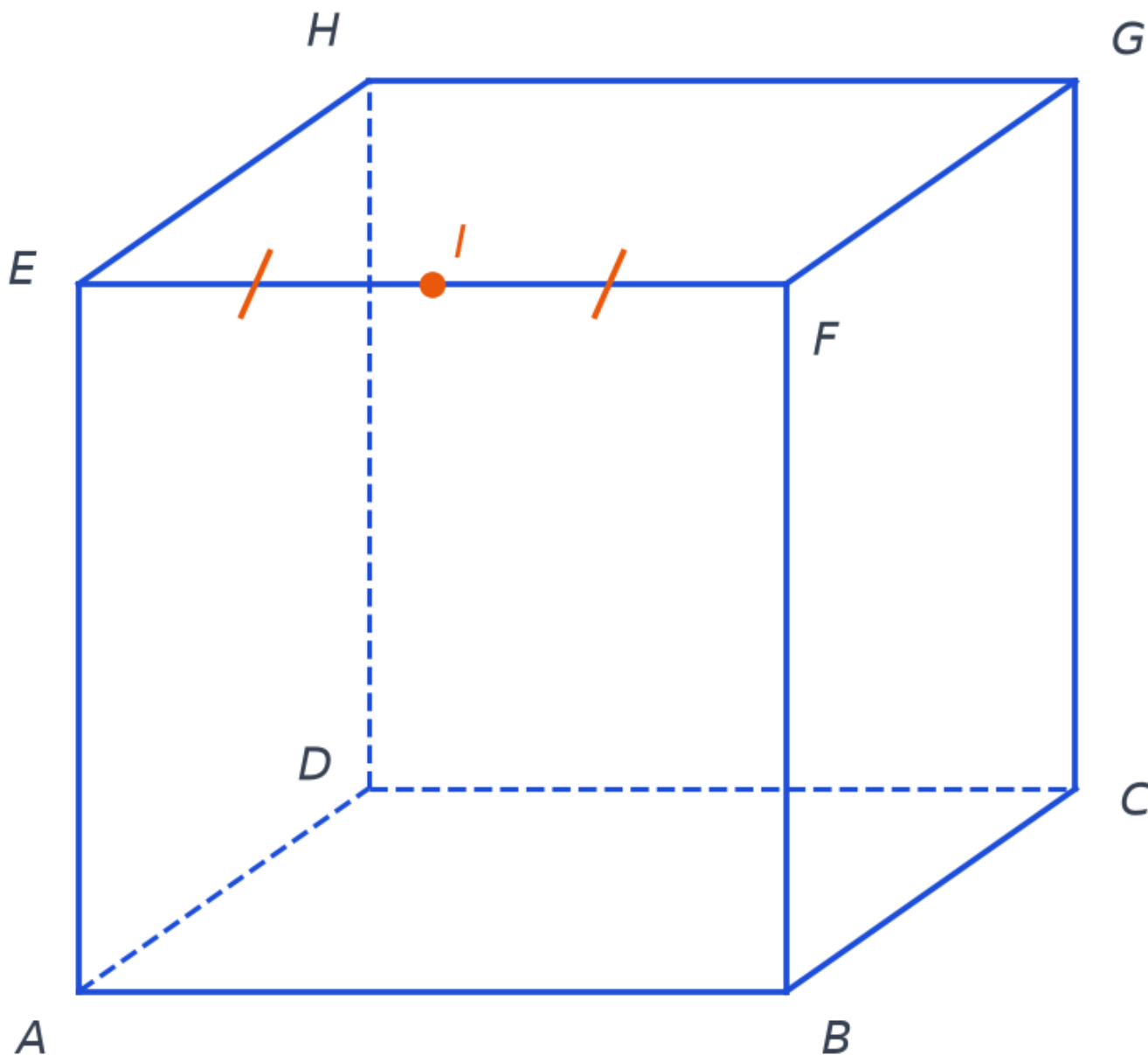
Commence par **nommer la base** dans laquelle tu travailles, car toute la rédaction en dépend. Quand tu dois prouver un alignement, exprime deux vecteurs dans cette base, puis cherche le coefficient qui les relie. Pour la coplanarité, pose un système et vérifie la **troisième équation** : c'est elle qui tranche. Relis aussi la figure en perspective avec méfiance, car deux segments qui

se croisent sur le dessin ne se coupent pas forcément dans l'espace.

Le sujet du contrôle : vecteurs et plans de l'espace

Exercice 1 - Chasles dans le cube (3 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous en perspective cavalière. De plus, le point I est le milieu de l'arête $[EF]$.



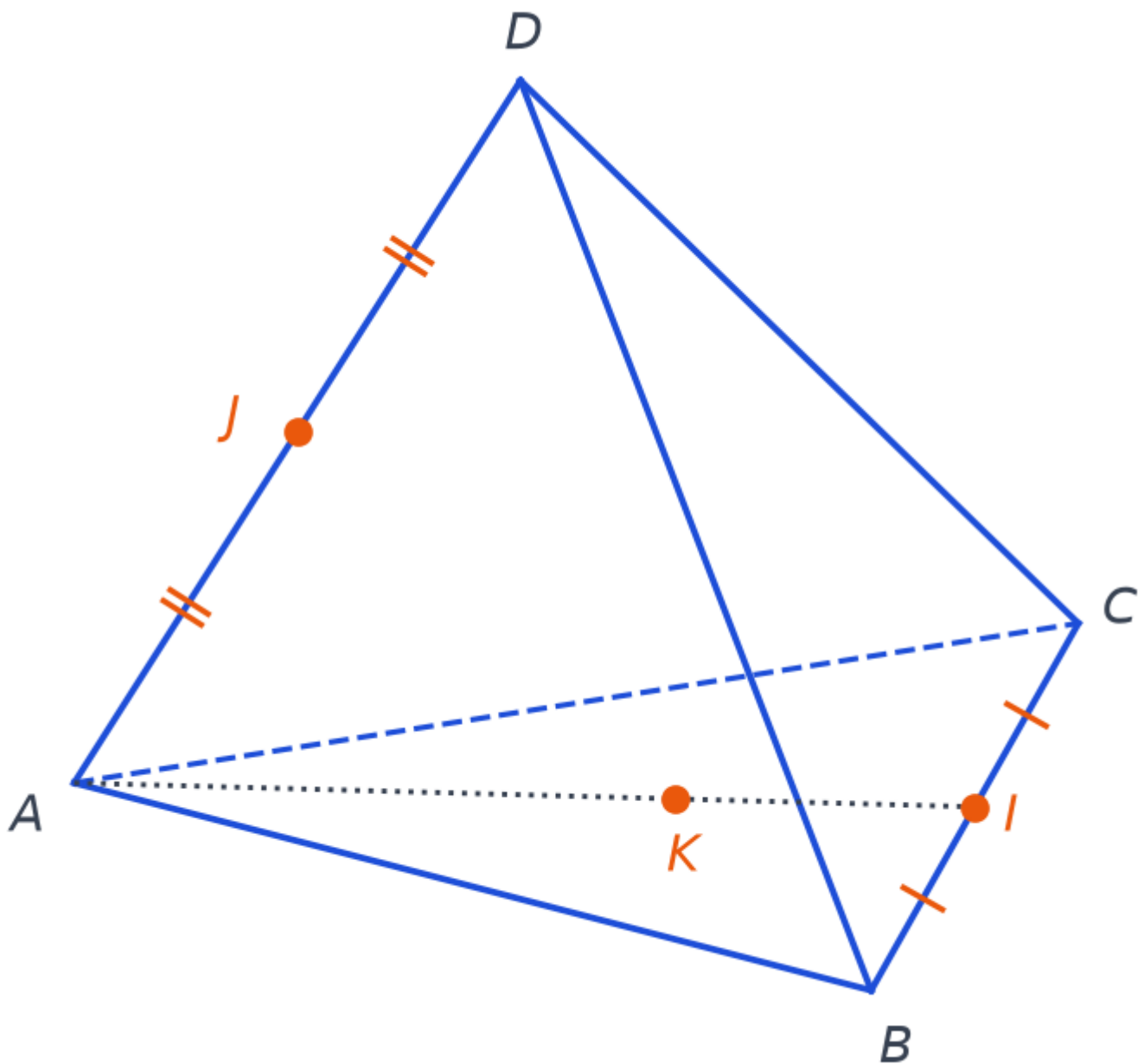
1. D'abord, simplifie la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}$ en un seul vecteur. (0,5 point)
2. Montre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$, en justifiant chaque égalité de vecteurs utilisée. (1 point)
3. Ensuite, exprime le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AE}$. (0,5 point)
4. Démontre que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{HC}$. Que peux-tu alors en déduire pour le quadrilatère $EBCH$? (1 point)

Exercice 2 - Un point remarquable du tétraèdre (4 points)

$ABCD$ est un tétraèdre. On note I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AD]$. De plus, on définit le point K par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ et le point G par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

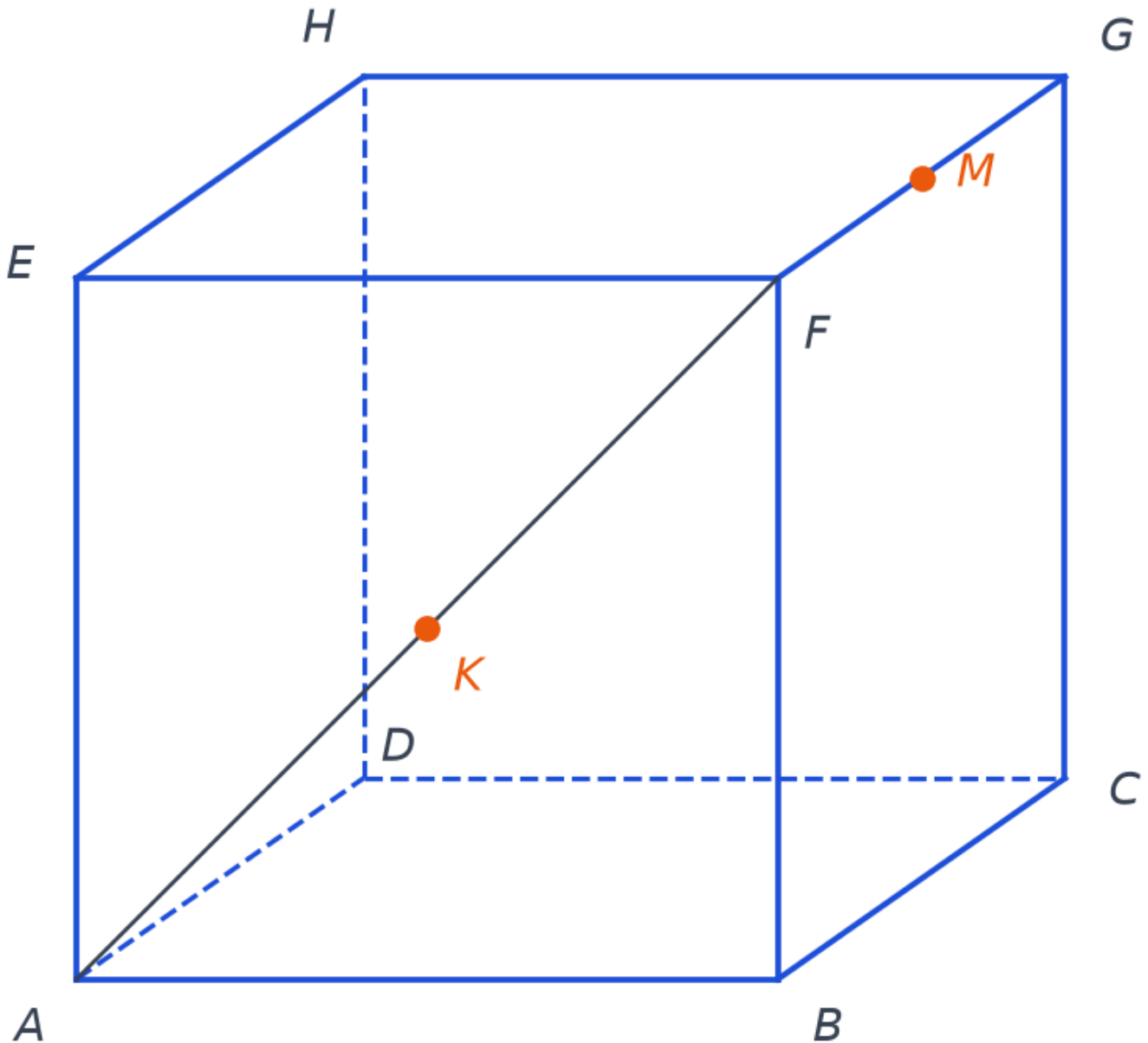
Ainsi, on travaille dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. En revanche, le point G n'est pas placé sur la figure.



1. Exprime $\overrightarrow{AI}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. (0,5 point)
2. Déduis-en l'expression de $\overrightarrow{JI}$ dans cette même base. (1 point)
3. Démontre alors que G est le milieu du segment $[IJ]$. (1 point)
4. Exprime $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{DG}$ dans la base, puis prouve que les points D , G et K sont alignés. Précise enfin la position de G sur le segment $[DK]$. (1,5 point)

Exercice 3 - Coordonnées dans un cube (4 points)

On reprend un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 et on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Le point M est le milieu de $[FG]$ et le point K est le centre de la face $ABFE$, c'est-à-dire le milieu de $[AF]$.



1. Donne d'abord les coordonnées des points C , G , H , M et K . (1,5 point)
2. On définit le point P par $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Calcule ses coordonnées. (0,5 point)
3. Démontre ensuite que les points D , P et K sont alignés. (1 point)
4. Montre que les droites (MK) et (AG) sont parallèles. Sont-elles pour autant confondues

? Justifie ta réponse. (1 point)

Exercice 4 - Une section du cube (4 points)

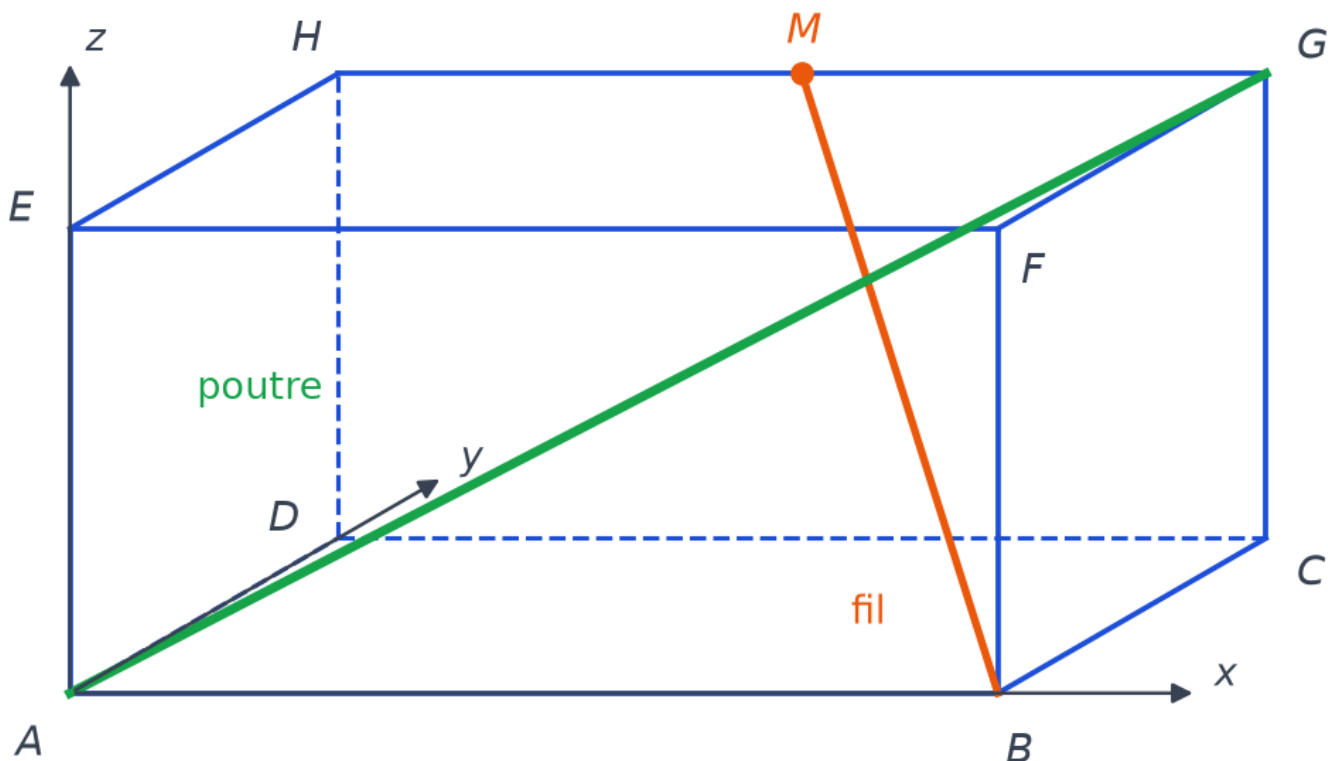
Dans cet exercice, $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4 cm, nommé comme sur la figure de l'exercice 1. On note I le milieu de $[AE]$ et J le milieu de $[BF]$. Finalement, on cherche la section du cube par le plan (IJC) .

1. Exprime $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, puis montre que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$. (1 point)
2. Justifie que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$. Explique pourquoi le point D appartient donc au plan (IJC) , puis dessine la section du cube par ce plan sur une figure à main levée. (1 point)
3. Quelle est donc la position relative de la droite (IJ) et du plan (ABC) ? (0,5 point)
4. On admet que la droite (DC) est orthogonale à toute droite de la face $ADHE$. Prouve que la section est un rectangle, puis calcule son aire exacte et une valeur arrondie au dixième. (1,5 point)

Exercice 5 - Le fil lumineux du grenier (5 points)

Nadia aménage un grenier qui a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$ avec $AB = 6$ m, $AD = 4$ m et $AE = 3$ m. Par exemple, une poutre rigide relie le coin A du sol au coin G du plafond. Ensuite, Nadia veut tendre un fil lumineux entre le coin B et le point M , milieu de l'arête $[GH]$ du plafond.

On se place dans le repère orthonormé d'origine A dont les axes suivent $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$, avec 1 mètre pour unité. Ainsi, B a pour coordonnées $(6;0;0)$. On néglige l'épaisseur du fil et de la poutre.



1. Donne les coordonnées de D , E , G , H et M , puis celles des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AG}$. (1 point)
2. Nadia veut accrocher une guirlande au point $T(4,5;2;1,5)$. Ce point appartient-il aussi au segment $[BM]$? Précise sa position. (1 point)
3. Trouve deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AG}$. Dédus-en que les droites (BM) et (AG) sont coplanaires, puis qu'elles sont sécantes. (1,5 point)
4. Calcule les coordonnées du point d'intersection P de ces deux droites. Le fil touche-t-il alors réellement la poutre? Si oui, à quelle hauteur du sol? (1,5 point)



Réviser vecteurs et plans de l'espace avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, entraîne-toi sur la fiche droites et plans de l'espace et vecteurs de l'espace et les équations paramétriques et cartésiennes de droites avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Équations paramétriques de droites : contrôle de maths en terminale
- Dénombrement et combinaisons : contrôle de maths en terminale
- Problèmes de dénombrement et tirages : contrôle de maths en terminale