Exercices sur calcul d'intégrales .

Exercice 1 : calculer la valeur exacte des intégrales à l'aide des primitives.

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1) $I = \int_{-4}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

2) $J = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

3) $K = \int_{2}^{3} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

4) $L = \int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Après avoir rappelé la formule de duplication donnant $\sin(2t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 : problème sur le calcul d'une intégrale classique.

On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} \, \mathrm{d}x.$$

1) Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.

2) En remarquant que $x = x + 1 - 1$, démontrer que pour tout $x \neq -1$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}$$

où α et β sont deux réels à déterminer.

3) En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

Exercice 3 : problème et calculs d'intégrales.

En remarquant que pour tout réel t, $t^3 = t^3 + t - t$, calculer la valeur de :

$$I = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_1^2 \frac{3u^2+2u-1}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On souhaite calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} t\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose $f : t \mapsto t\cos(t)$, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que pour tout réel t :

$$f(t) = -2\sin(t) - f''(t).$$

2) En déduire la valeur de I.

Exercice 4 : intégration avec exponentielle, sinus et cosinus.

On considère les deux intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x \qquad I = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$$

1) Calculer $I+J$ et $I-J$.
2) En déduire les valeurs de I et J.

Même consigne

$$I = \int_0^{\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad J = \int_0^{\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5 : une étude de fonction puis d'une intégrale.

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

1) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f ?

2) **a)** Représenter graphiquement f sur $\mathscr{D}_f$ et conjecturer la nature géométrique de $\mathscr{C}_f$.

b) Soit $M(x_M\,;y_M)$ un point du plan. Démontrer que $M \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $OM = 1$ et $x_M \in \mathscr{D}_f$.

c) En déduire la nature exacte de $\mathscr{C}_f$.

3) On considère $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Pourquoi cette intégrale est-elle bien définie ?

b) Déduire des questions précédentes la valeur de I.

Exercice 6 : démontrer que ces fonctions sont des primitives.

Soient φ et ψ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x t^2 e^t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

1) **a)** Démontrer que φ et ψ sont deux primitives sur $\mathbb{R}^+$ d'une même fonction f que l'on précisera.

b) En déduire la relation qu'il existe entre φ et ψ.

2) Déterminer la primitive F de f telle que :

a) $F(0) = 0$ **b)** $F(1) = 0$

Exercice 7 : les fonctions F et G sont-elles des primitives ?.

Soient $F : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{x+1}$ et $G : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x+1}$ définies sur $I =]-\infty\,;-1[$.

1) Les fonctions F et G sont-elles des primitives d'une même fonction sur I ?

2) Si oui, laquelle ?

Exercice 8 : déterminer les primitives de chacune des fonctions.

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1) $f : x \mapsto x^2 + x^3$ sur $\mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 1$ sur $]0\,;+\infty[$

3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$

4) $f : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

Même consigne

1) $f : x \mapsto x^5 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^5} - \dfrac{1}{4x}$ sur $]0\,;+\infty[$

3) $f : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$

4) $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 9 : représenter ces fonctions et déterminer la primitive.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

1) En reconnaissant une forme connue de dérivée, déterminer une primitive H_1 de h sur $\mathbb{R}$.
2) a) Pour tout réel t, écrire $h(t)$ à l'aide d'un sinus.
   b) À partir de cette forme, en déduire une primitive H_2 de h sur $\mathbb{R}$.
3) a) Représenter graphiquement H_1 et H_2. Ces deux fonctions sont-elles égales ?
   b) Quelle est la constante qui les différencie ?
4) Déterminer la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Exercice 10 : sur quel intervalle F est-elle une primitive de la fonction ln ?.

$$\int_a^b \ln(x)\mathrm{d}x = b\ln(b) - a\ln(a) - b + a, \quad 1 \leqslant a < b.$$

1) À la vue de ce résultat, quelle fonction F semble être une primitive de la fonction logarithme népérien sur $[1\,;+\infty[$?
2) Le vérifier par le calcul.
3) En réalité, sur quel intervalle F est-elle une primitive de la fonction ln ?

Exercice 11 : calculer la valeur exacte des intégrales.

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1) $I = \int_{-1}^{4} (x-1)^2 \, \mathrm{d}x$

3) $K = \int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{\cos(t)} \sin(t) \, \mathrm{d}t$

2) $J = \int_{1}^{2} \frac{1}{(2x-1)^2} \, \mathrm{d}x$

4) $L = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2-1}{x} \, \mathrm{d}x$

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive.

1) $I = \int_{-4}^{-3} \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} \, \mathrm{d}x$

3) $K = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x$

2) $J = \int_{-2}^{1} u(u^2-1)^2 \, \mathrm{d}u$

4) $L = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{t+\mathrm{e}^t} \, \mathrm{d}t$

Exercice 12 : déterminer la primitive d'une fonction f.

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle donné.

1) $f : x \mapsto x^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$

4) $f : x \mapsto -\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

5) $f : x \mapsto \frac{1}{x^6}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$

3) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

6) $f : x \mapsto \frac{4}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 13 : calculer la primitive de ces fonctions.

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle donné.

1) $f : x \mapsto 2x(x^2+1)^2$ sur $\mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

4) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1\,;1[$

5) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1-2x}$ sur $\mathbb{R}$

6) $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 14 : calculer chacune des intégrales.

Calculer chacune des intégrales suivantes à l'aide de primitives :

1) $\displaystyle\int_{-2}^{4} x\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{-\mathrm{e}}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_{4}^{25} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u$

6) $\displaystyle\int_{\pi}^{0} \sin(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 15 : calculer les intégrales à l'aide des primitives.

Calculer chacune des intégrales suivantes à l'aide de primitives :

1) $\displaystyle\int_{5}^{7} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{2u+1}{u^2+u+1}\,\mathrm{d}u$

3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 16 : fonctions continues et valeur des intégrales.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[-3\,;4]$ telles que :

$$\int_{-3}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = -2 \qquad \int_{1}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = 3$$

et

$$\int_{-3}^{4} g(t)\,\mathrm{d}t = -1 \qquad \int_{1}^{4} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Donner la valeur de chacune des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-3}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_{-3}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_{1}^{4} (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{1}^{4} (f-g)(t)\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_{1}^{4} (4f-3g)(t)\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_{-3}^{4} (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 17 : propriétés de l'intégrale et sa linéarité.

Réduire chacune des expressions suivantes (on ne demande pas de les calculer) :

1) $\displaystyle\int_0^1 (e^{x^2} - 1)\,dx + \int_0^1 dx + \int_1^2 e^{x^2}\,dx$

2) $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{\ln(x)}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{\ln(x)}\,dx$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^{-2} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t^2)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(u^2)\,du$

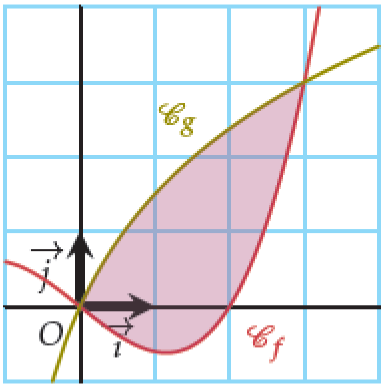
5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx - \int_3^1 du + \int_3^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$

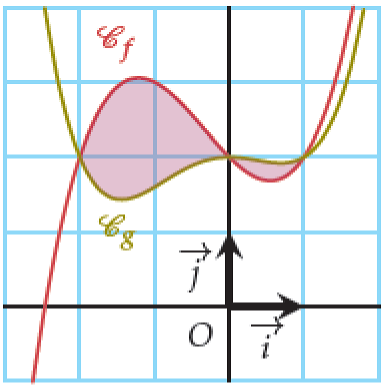
Exercice 18 : exprimer l'aire du domaine colorié.

Dans chacun des cas suivants, exprimer l'aire du domaine colorié sous la forme d'une intégrale.
(On ne demande pas de calculer l'intégrale.)

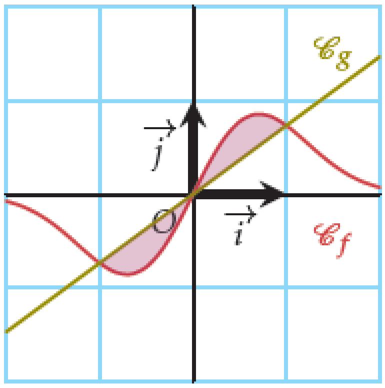
1)



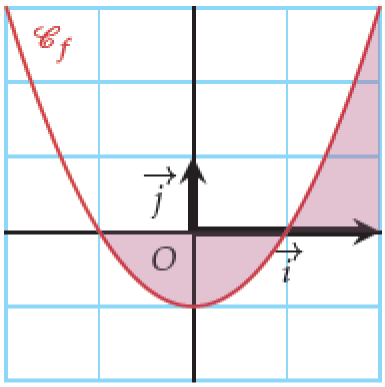
2)



3)



4)



Exercice 19 : représenter graphiquement l'intégrale et donner sa valeur.

On considère l'intégrale $I = \int_a^b \mathrm{d}x$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

1) De quelle fonction I est-elle l'intégrale ?

2) Représenter graphiquement le domaine dont l'aire est donnée par I.

3) Donner la valeur de I, en u.a.

Exercice 20 : représenter graphiquement le domaine et valeur de l'intégrale.

Dans chacun des cas suivants :

1) représenter graphiquement le domaine dont l'aire est donnée ;
2) décrire ce domaine ;
3) donner la valeur de son aire, en u.a.

a) $\int_{-1}^{1} 3\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{-5}^{2} \mathrm{d}x$

c) $\int_{0}^{3,5} x\,\mathrm{d}x$

d) $\int_{0}^{2} (4-x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 21 : aire de domaine à l'aide d'une intégrale.

Dans chacun des cas suivants, écrire ou donner :

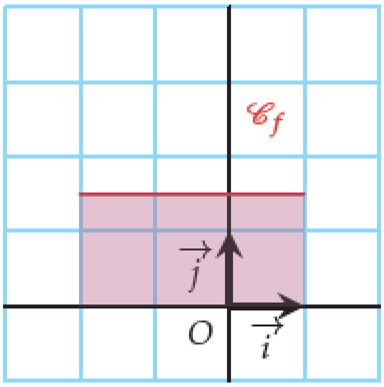
1) l'expression de la fonction f représentée en rouge ;

2) la description du domaine coloré ;

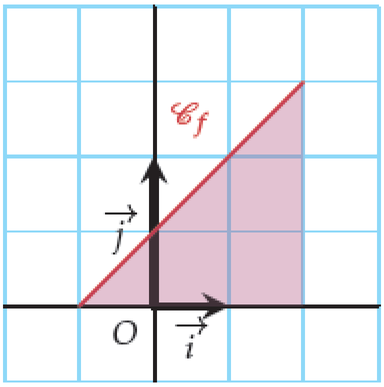
3) l'aire de ce domaine à l'aide d'une intégrale ;

4) l'aire de ce domaine, en u.a.

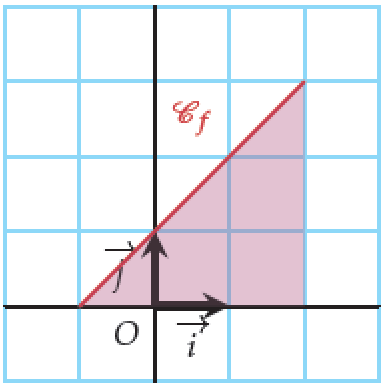
a)



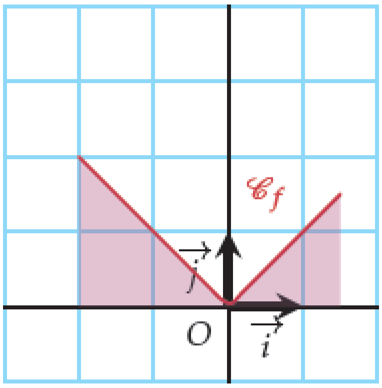
c)



b)



d)



Exercice 22 : tracer la courbe et calculer l'intégrale.

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si} \quad -2\leqslant x\leqslant 0\\ x+1 & \text{si} \quad 0< x\leqslant 3\end{cases}$$

a) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

b) Calculer $\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 23 : déterminer le nombre a et intégrales.

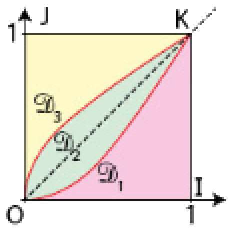
a) Dans un repère orthogonal, tracer la droite d'équation $y = x + 4$.

b) Déterminer le nombre réel $a > 0$ tel que :

$$\int_{-1}^{a} (t + 4)\,dt = \int_{-4}^{0} (t + 4)\,dt$$

Exercice 24 : courbes représentatives et carré.

Dans un repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ déterminent trois domaines $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ dans le carré OIKJ ci-contre.



On admet que $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$.

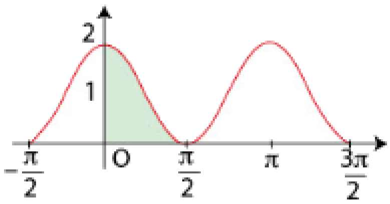
a) En déduire l'aire, en u.a., de $\mathcal{D}_3$.

b) Par quelle transformation géométrique passe-t-on de $\mathcal{D}_3$ à $\mathcal{D}_1$?

c) En déduire en u.a., l'aire de $\mathcal{D}_1$, puis l'aire de $\mathcal{D}_2$.

Exercice 25 : fonction définie sur un intervalle et intégrale.

La fonction f représentée ci-dessous est définie sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ par $f(t) = \cos(2t) + 1$.



On admet que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\,dt$ et en déduire $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t)\,dt$.

Exercice 26 : calculer ces intégrales.

Calculer :

a) $\int_0^4 3\,dx$;

b) $\int_3^7 \left(\frac{1}{2}t + 2\right)dt$.

Exercice 27 : fonction continue et intégrale.

f est la fonction définie sur $[-2\,;3]$ par :

$$f(x) = |x|$$

a) La fonction f est-elle continue sur la fonction $[-2\,;3]$?

b) Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;3]$.

c) Calculer $\int_{-2}^{3} |x| \mathrm{d}x$.

Exercice 28 : fonction définie sur un intervalle.

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$ représentée dans le repère ci-contre.

Calculer $\int_{-2}^{2} f(x) \mathrm{d}x$.