Exercices sur continuité et équations .

Exercice 1 : fonctions rationnelles et asymptotes.

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{2x-1}$ où a et b sont deux réels et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.

On sait que : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

1) a) Déterminer a et b.

b) Montrer que $f(x) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a+2b}{4x-2}$.

2) Déterminer les asymptotes à $\mathscr{C}$.

3) Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Tracer l'allure de $\mathscr{C}$.

Exercice 2 : sens de variation, signe et solutions de l'inéquation.

Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-2}.$$

1) Montrer que, pour tout $x \neq 2$, $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-2}$.

2) Donner les limites aux bornes de $\mathcal{D}$.

3) En utilisant la forme la plus adaptée, déterminer :

a) le sens de variation de la fonction f ;

b) le signe de $f(x)$;

c) les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 2$.

Exercice 3 : préciser si les affirmations sont vraies ou fausses.

Pour chacune des quatre affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

1) « Si a est un réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. »

2) Soit f et g deux fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ telles que g ne s'annule pas.
« Si $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ».

3) « Si f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ».

4) « Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans un repère du plan ».

Exercice 4 : trouver la bonne réponse parmi les réponses proposées.

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1}$$

et Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Trouver la ou les bonne(s) réponse(s) parmi les quatre réponses proposées.

a) Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.
b) Γ n'admet pas d'asymptote.
c) Γ admet une asymptote d'équation $x = 1$.
d) Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

Exercice 5 : lien entre continuité et dérivabilité.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.
Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

a) Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

b) Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

c) Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie en 0.

Exercice 6 : le théorème des gendarmes.

1) Soit f une fonction réelle définie sur $[a\,;\,+\infty[$.
Compléter la phrase suivante :
« On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ... ».

2) Démontrer le théorème « des gendarmes » :
« Soit f, g et h trois fonctions définies sur $[a\,;\,+\infty[$.
Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$ et si, pour tout x suffisamment grand, on a l'encadrement $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ ».

Exercice 7 : continuité en 1 et - 1 d'une fonction.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -\dfrac{1}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est-elle continue en 1 ?

La fonction f définie sur $[-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

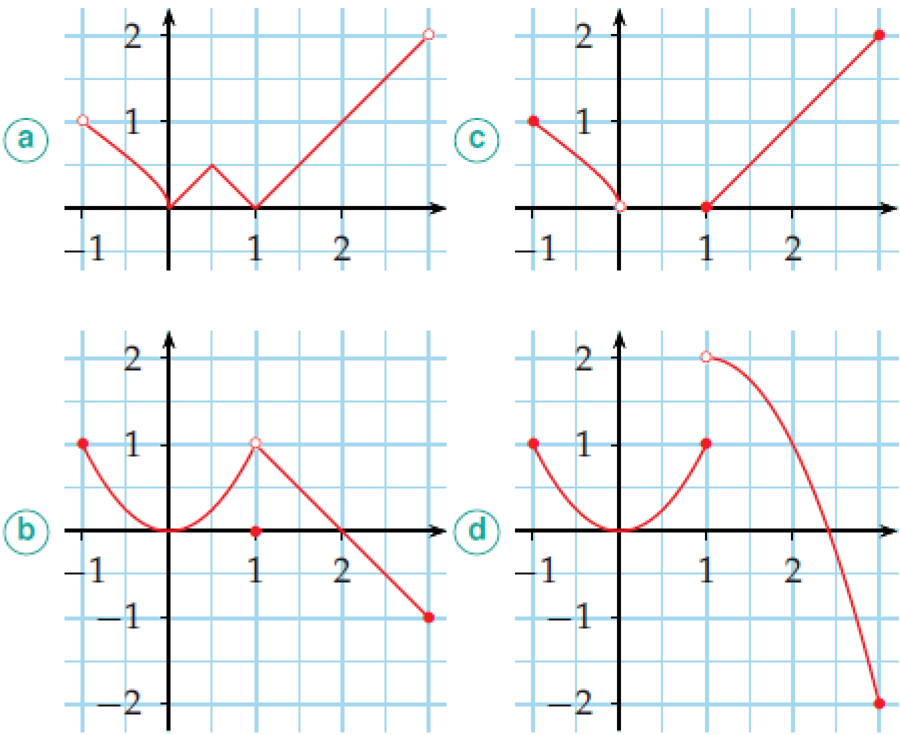
est-elle continue en -1 ?

Exercice 8 : déterminer les intervalles où f est continue.

Dans chaque repère ci-dessous, la courbe tracée représente une fonction f.

1) Déterminer les intervalles où f est continue.

2) Donner l'image de 1 par la fonction f.
Coïncide-t-elle avec les limites de f en 1, à gauche et à droite ?



Exercice 9 : déterminer l'ensemble de définition de f.

Soit la fonction f définie par ;

$$f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2) Représenter graphiquement f à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.
3) Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 10 : lA fonction f est-elle continue en 1 ?.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2x-1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

1) Tracer la courbe représentative de f.
2) La fonction f est-elle continue en 1 ?
3) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$.

Exercice 11 : fonction et continuité en 0.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2+\sqrt{5} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{9+4\sqrt{5}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

est-elle continue en 0 ?

Exercice 12 : algorithme et fonction continue.

On considère l'algorithme suivant.

```
1.  Saisir x
2.  Si x⩽-1 alors f prend la valeur x+2
3.  Sinon f prend la valeur x²
4.  Fin Si
5.  Afficher f
```

1) Que vaut f en sortie si on saisit pour x :
   - -2
   - 2
   - -1
   - $-1,01$
   - $-0,99$
2) Soit f la fonction définie par l'algorithme.
   a) Exprimer $f(x)$ selon les valeurs de x.
   b) Représenter graphiquement la fonction f.
3) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13 : tableau de variation et continuité.

Soit la fonction f définie sur $I = [-4 ; 1]$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$$

dont les variations sont données par le tableau suivant :

x	-4		-3		-1		1
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	19

1) Justifier que f est continue sur I.
2) Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 2$.
3) a) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.
   b) Déterminer un encadrement de α à l'unité près.

Exercice 14 : valeur approchée d'une solution d'équation.

Soit la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = 0,4x^5 - 8x - 3.$$

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.
3) Chercher une valeur approchée de cette solution à l'aide d'une calculatrice (arrondir à 0,01 près).

Exercice 15 : une équation qui admet une unique solution.

1) Montrer que l'équation :

$$-2x^3 - 6x^2 + 18x + 59 = 0$$

admet une unique solution réelle α.

2) Avec une calculatrice, encadrer α au dixième près.

Exercice 16 : fonction polynôme et forme canonique.

Soit la fonction polynôme de degré 2 :

$$f : x \mapsto 4x^2 - 8x + 7.$$

1) Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ en fonction de la valeur réelle de k.

Exercice 17 : solution unique et encadrement.

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 2 \text{ et } g(x) = x + 2.$$

1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique α dans $[-1 ; 0]$.
   Qu'en est-il sur $\mathbb{R}$?
   b) Donner un encadrement de α à 0,001 près à l'aide d'une calculatrice.

Exercice 18 : dresser le tableau de variation et solutions de l'équation.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4.$$

1) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -4$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -12$.
4) Existe-t-il un réel y tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution ?

Exercice 19 : tableau de variation et solution de f(x)=k.

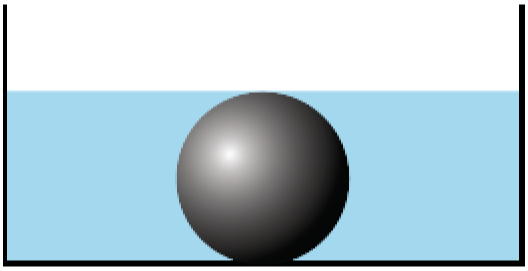
Une fonction g a pour tableau de variation :

x	-10		-4		0		3		10
g	$\sqrt{2}$	↘	$-\pi$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Discuter, suivant la valeur de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 20 : une boîte cylindrique et une boule immergée.

Une boite cylindrique de rayon 12 cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 5 cm. On immerge une boule métallique dans ce récipient et on constate que la surface de l'eau est tangente à la boule. On désigne par x le rayon de la boule en millimètre.



1) a) Démontrer que $25 \leqslant x \leqslant 120$.

b) Démontrer que x est solution de l'équation :

$$x^3 - 21\,600x + 540\,000 = 0 \qquad \text{(E)}$$

2) a) Démontrer que l'équation (E) admet deux solutions positives α et β telles que :

$$\alpha \in [25,6\,;\,26] \quad \text{et} \quad \beta \in [125\,;\,135].$$

b) Déterminer alors une valeur approchée du rayon de la boule à 0,1 mm près.

Exercice 21 : fonction continue sur un intervalle.

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4[$ par :

$$f(x) = x^2 - \lfloor x \rfloor.$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

1) À l'aide de la calculatrice, tracer une représentation graphique de f.
2) La fonction f est-elle continue sur $[0\ ;\ 4[$?
   Sinon, indiquer pour quelles valeurs elle n'est pas continue.
3) Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ 4[$ par :

$$g(x) = (x-3)\left(x^2 - \lfloor x \rfloor\right).$$

   Étudier la continuité de g en $x \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

Exercice 22 : théorème des valeurs intermédiaires.

1) Justifier le théorème suivant :
   « *Si f est une fonction définie et continue sur $[a\ ;\ b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = 0$* ».
2) En déduire que, si deux fonctions f et g sont continues sur un même intervalle $I = [a\ ;\ b]$ et si leur différence change de signe sur I, alors il existe un réel $c \in I$ tel que $f(c) = g(c)$.

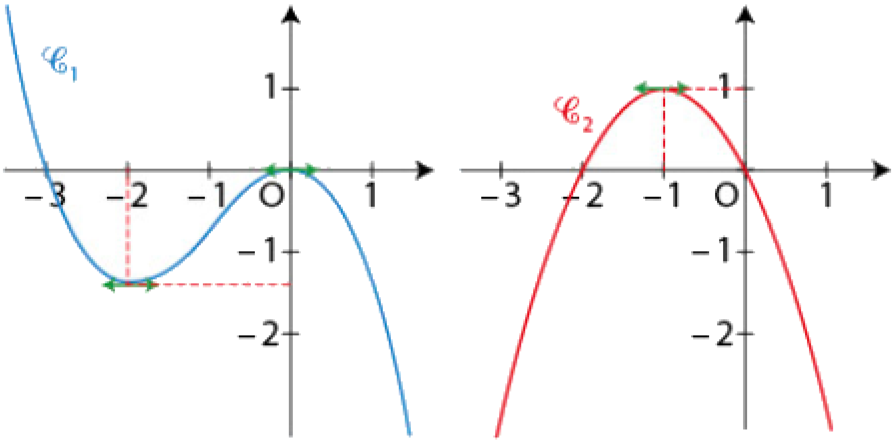
Exercice 23 : déterminer l'ensemble de définition et limites de f.

Soit la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{5x}{3x-5}}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2) Écrire f comme composée de deux fonctions.
3) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.
4) Tracer les asymptotes à $\mathscr{C}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 24 : courbes d'une fonction et de sa dérivée.

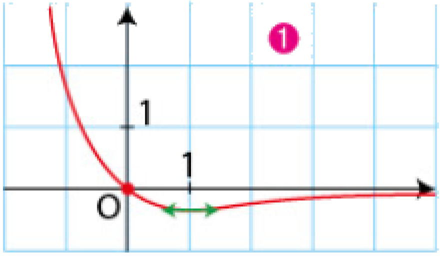
Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ci-dessous représentent une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f'.

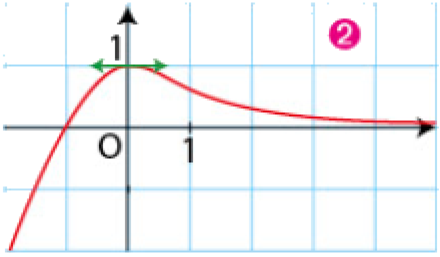


Parmi ces courbes, laquelle représente la fonction f et laquelle représente la fonction f' ?

Exercice 25 : lire graphiquement et équation de la tangente.

Voici deux courbes. L'une représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;5]$ et l'autre représente sa fonction dérivée f'.





a) Laquelle représente f et laquelle représente f' ?

b) Lire alors graphiquement les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

c) En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.