Exercices sur intervalle de fluctuation et estimation .

Exercice 1 : des fusées pour un feu d'artifice.

Samuel veut acheter des fusées pour un feu d'artifice qu'il souhaite grandiose.

Le vendeur affirme que 15 % des mèches de fusées s'éteignent, empêchant le départ des fusées. Samuel souhaite qu'au moins 100 fusées soient fonctionnelles ; ne pouvant être sûr de rien, il souhaite avoir au moins 95 % de chance d'avoir 100 fusées opérationnelles.

On note n le nombre de fusées achetées par Samuel. On suppose que le stock de fusées est suffisamment grand pour assimiler le choix des fusées à un tirage au sort avec remise. On note X le nombre de fusées opérationnelles parmi celles achetées par Samuel.

1) Quelle loi suit X ? Préciser ses paramètres.
2) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de fusées opérationnelles au seuil de 95 % en fonction de n.
3) En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique du nombre de fusées opérationnelles au seuil de 95 % en fonction de n.
4) Déterminer la quantité de fusées que Samuel doit acheter pour être sûr au seuil de 95 % d'avoir au moins 100 fusées opérationnelles.

Exercice 2 : intervalle de fluctuation et équilibre d'un dé.

On cherche à savoir si un dé cubique est équilibré : pour cela, on le lance 1 000 fois et on s'intéresse au nombre de 1 obtenus.

Dans l'hypothèse où l'on lance 1 000 fois un dé équilibré, un intervalle de fluctuation de la fréquence de 1 obtenus au seuil de 95 % est [0,143 ; 0,190].

Que peut-on dire du dé si l'on obtient :

1) 200 fois le nombre 1 ? 2) 150 fois le nombre 1 ?

Exercice 3 : l'intervalle contenant p avec une probabilité.

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n.

On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Exercice 4 : algorithme et probabilités.

1. *Liste des variables utilisées*
2. `n` : *entier*
3. `a,b,f,p` : *réels*
4. *Traitement et affichage*
5. Demander `p`
6. Demander `n`
7. Demander `f`
8. Donner à `a` la valeur $p - 1{,}96 * \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$
9. Donner à `b` la valeur $p + 1{,}96 * \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$
10. **Si** f<a ou f>b **Alors**
11. Afficher "On peut rejeter cette hypothèse au seuil de … "
12. **Sinon**
13. Afficher "…"
14. **Fin Si**

1) Compléter les lignes 11 et 13 de l'algorithme.
2) Que fait-il ?
3) Modifier l'algorithme pour qu'il demande d'abord à l'utilisateur s'il souhaite un seuil de 95 % ou de 99 %.

Exercice 5 : une compagnie ferroviaire et fluctuation.

Une compagnie ferroviaire annonce que 90 % de ses trains arrivent à l'heure. Un usager conteste ce nombre et décide de compter pendant 60 jours le nombre de fois où le train arrive en retard sur son trajet.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des trains arrivés à l'heure d'après la compagnie.
2) Cet usager a relevé que son train avait eu 12 fois du retard.
   a) Déterminer la fréquence des trains arrivés à l'heure. Cette fréquence appartient-elle à l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1 ?
   b) Proposer deux hypothèses permettant d'expliquer le résultat de la question précédente.

Exercice 6 : une étude de l'INSEE sur les bébés français hors mariage.

D'après une étude de l'INSEE en 2006, la moitié des bébés français sont nés hors mariage.

Sur un échantillon de 1 000 naissances au cours de l'année 2010, on a observé que 556 ont eu lieu hors mariage.

On fait l'hypothèse que la proportion de naissances hors mariage en 2010 est la même qu'en 2006.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
2) Que peut-on en déduire concernant l'hypothèse émise ?

Exercice 7 : un producteur de jus de pomme et sa commercialisation.

Un producteur de jus de pomme a constaté que 4 % de sa production n'avait pas pu être commercialisée l'an dernier à cause d'une teneur en sucre trop élevée.

Il décide de tester un échantillon de sa nouvelle production pour savoir si la proportion de bouteilles non commercialisables est différente de celle de l'année dernière.

Il choisit au hasard dans sa production 598 bouteilles, et compte le nombre X de bouteilles non commercialisables (on suppose que le volume de sa production est tel que l'on peut assimiler le choix de cet échantillon à un tirage au sort avec remise).

1) Quelle loi suit X sous l'hypothèse où la proportion de bouteilles non commercialisables n'aurait pas évolué d'une année sur l'autre ?
2) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de bouteilles non commercialisables au seuil de 95 % dans cet échantillon.
3) Le producteur trouve finalement 19 bouteilles non commercialisables.
Peut-il affirmer qu'il a fait mieux que l'an dernier ?

Exercice 8 : déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour $n = 100$ et $p = 0{,}4$.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour $n = 4\,000$ et $p = \frac{1}{3}$.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 99 % pour $n = 77$ et $p = 0{,}89$.

Exercice 9 : la population française et le port de lunettes.

Selon une enquête de la DREES, 70 % des plus de 20 ans de la population française portent des lunettes ou des lentilles de contact.
On considère un échantillon de 400 personnes tirées au sort dans la population française et on admet que la population française est suffisamment grande pour assimiler ce tirage au sort à un tirage avec remise.
On note X le nombre de personnes qui portent des lunettes ou des lentilles dans l'échantillon.

1) Quelle loi suit X ?
2) Contrôler que n et p vérifient bien les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
3) En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des porteurs de lunettes ou de lentilles dans cet échantillon.
4) Donner une interprétation concrète du résultat précédent.

Exercice 10 : lancers d'une pièce équilibrée.

On lance 50 fois de suite une pièce équilibrée.
On note X le nombre de « pile » obtenus.

1) a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de « pile » obtenus au seuil de 95 %.
   b) En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique de X au seuil de 95 %.
2) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de X au seuil de 99 %.

Exercice 11 : ecrire un algorithme et intervalle de fluctuation asymptotique.

Écrire un algorithme :

- demandant en entrée les valeurs de p et n ;
- donnant en sortie les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Exercice 12 : lancers de dé et intervalle de fluctuation asymptotique.

Mickaël possède un dé dont il souhaite vérifier l'équilibre.

Il lance ce dé 100 fois, et note le nombre de 6 obtenus.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de 6 obtenus au seuil de 95 %.
2) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de 6 obtenus au seuil de 99 %.
3) a) Quel intervalle est inclus dans l'autre ?
   b) Pourquoi était-ce prévisible ?

Exercice 13 : une fabrique de chocolat et une machine à tablettes.

Dans une fabrique de chocolat, une machine met en forme les tablettes. Elle fabrique des tablettes imparfaites avec une probabilité 0,025.

Quand une tablette est parfaitement formée, elle est vendue 2 €. Lorsqu'elle est imparfaite, elle est vendue en vrac à 0,75 € dans le magasin d'usine. Chaque jour, l'usine produit 20 000 tablettes de chocolat.

1) Déterminer un intervalle de fluctuation de la fréquence de tablettes imparfaites au seuil de 95 %.
2) On suppose que toute la production est vendue. Déterminer un intervalle de fluctuation du chiffre d'affaires quotidien réalisé au seuil de 95 %.

Exercice 14 : bonbons et proportion d'échantillon.

Dans le même échantillon qu'à l'exercice 1, il y avait 152 bonbons jaunes pour une proportion annoncée de 20 % et 125 bonbons rouges pour une proportion annoncée de 10 %.
Que peut-on conclure de ces résultats ?

Exercice 15 : lois de la transmission des caractères héréditaires de Mendel.

D'après les lois de la transmission des caractères héréditaires de Mendel, certains croisements de différentes variétés de pois devraient donner des pois jaunes et des pois verts dans une proportion égale à 3 pour 1.
Lors d'une expérience, on a obtenu un échantillon, que l'on peut considérer comme aléatoire, présentant 176 pois jaunes et 48 pois verts.
Ces résultats sont-ils cohérents avec la théorie de Mendel ?

Exercice 16 : déterminer l'intervalle de fluctuation.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % si $n = 100$ et $p = 0{,}5$.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 99 % si $n = 10\,000$ et $p = 0{,}2$.

Exercice 17 : nombre de spams reçus dans ses emails.

Mélanie s'intéresse au nombre de spams reçus dans ses emails. Une de ses connaissances affirme que les spams représentent 10 % des mails échangés, ce dont doute Mélanie.

Elle décide d'étudier un échantillon de 100 mails pour tester cette hypothèse : sous celle-ci, on note X le nombre de spams dans un échantillon de 100 mails.

1) Préciser la loi suivie par X.
2) Calculer de tête $\dfrac{\sqrt{0{,}1 \times 0{,}9}}{\sqrt{100}}$.
3) En déduire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
4) Mélanie a compté 6 spams parmi 100 mails reçus. Que penser de l'hypothèse de départ ?

Exercice 18 : une bûcheronne et le nombre de chênes.

Une bûcheronne a compté 3 320 chênes dans un bois parmi les 10 000 arbres rencontrés.

Sans calculatrice, déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de chênes dans ce bois.

Exercice 19 : sondage et projet immobilier.

Un maire souhaite lancer un sondage pour déterminer si les habitants de sa commune approuvent un projet immobilier au seuil de confiance de 95 %.

1) Combien de personnes doit-il sonder s'il veut avoir une estimation à 1 % près de la proportion de personnes favorables ?
2) Combien de personnes doit-il sonder s'il veut avoir une estimation à 0,1 % près de la proportion de personnes favorables ?

Exercice 20 : intervalle de fluctuation et pièce équilibrée.

On lance n fois une pièce équilibrée.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de « face » obtenus au seuil de 95 % pour $n = 100$.
2) Même question pour $n = 10\,000$.
3) Combien de lancers devrait-on effectuer pour avoir l'intervalle de fluctuation asymptotique d'amplitude $1{,}96 \times 10^{-3}$?