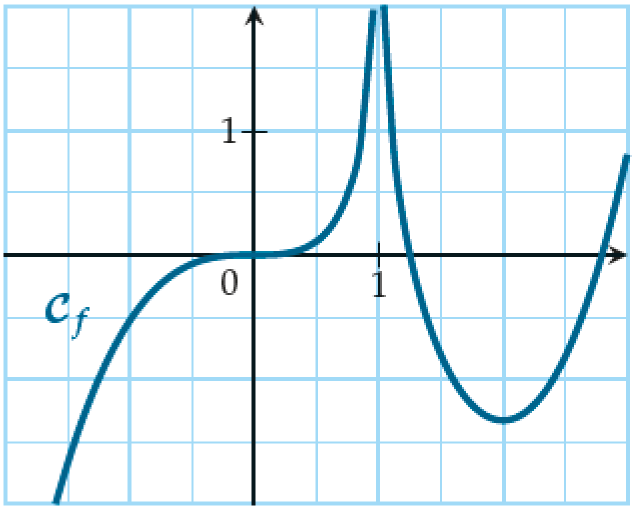
Exercices sur la dérivation et la dérivée d'une fonction .

Exercice 1 : donner le tableau de signes.

On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

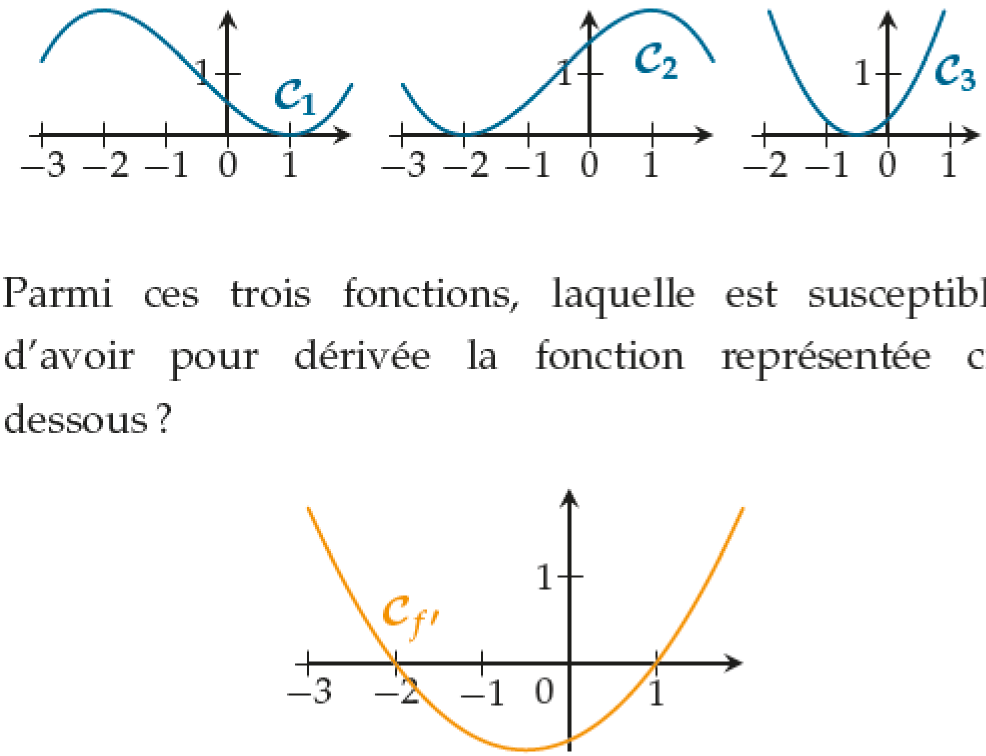


Établir le tableau de signes de $f'(x)$.

Exercice 2 : parmi ces fonctions quelle est celle de la dérivée de f ?.

Téléchargé sur https://maths-pdf.fr

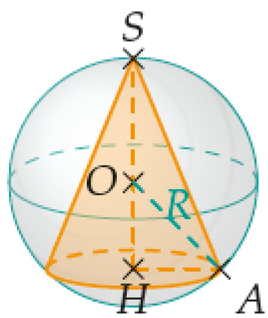
On donne ci-dessous les représentations de trois fonctions f_1, f_2 et f_3.



Parmi ces trois fonctions, laquelle est susceptible d'avoir pour dérivée la fonction représentée ci-dessous ?

Exercice 3 : volume maximal d'un cône inclus dans une sphère.

On considère une sphère de centre O et rayon R et dans cette sphère, un cône comme indiqué dans la figure ci-contre.

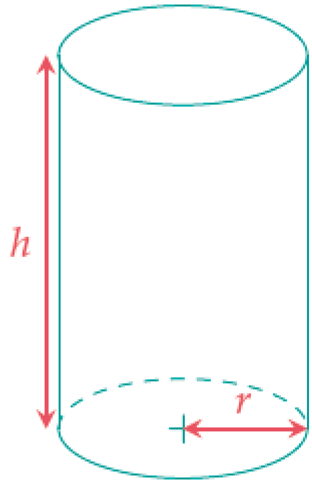


Quel est le volume maximal du cône ?

Indication : dans cet exercice, on peut choisir comme variable d'étude soit $r = HA$, soit $x = HO$. Essayer les deux approches.

Exercice 4 : une boîte de conserve et la surface de métal.

On considère une boîte de conserve classique de forme cylindrique. Pour un volume $\mathcal{V}$ donné, on souhaite minimiser la quantité de métal utilisé pour confectionner cette boîte. On note r le rayon de la base et h la hauteur.



1) Démontrer que la surface de métal utilisé est :

$$\mathcal{S}(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\mathcal{V}}{r}.$$

2) Étudier la fonction $\mathcal{S}$ sur son ensemble de définition, que l'on précisera.

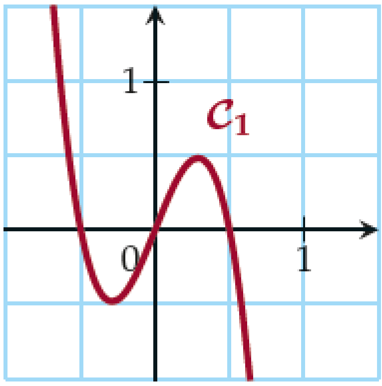
3) En déduire les dimensions de la boîte répondant au problème.

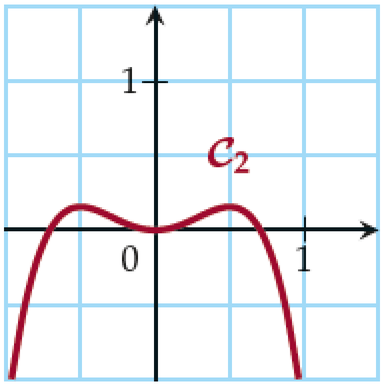
4) Application numérique : tester les dimensions d'une boîte cylindrique choisie dans le placard dont le volume est donné (en mL ou cm^3).

Exercice 5 : courbe de f et de f'.

Téléchargé sur https://maths-pdf.fr

Voici deux courbes dont l'une représente une fonction f et l'autre sa dérivée f'.





Quelle est la courbe représentant f et quelle est celle représentant f' ?

Exercice 6 : tableau de signes d'une fonction.

On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et $f(-1) = -2$ et $f(1) = 2$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ et $f(4) = 3$.

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 7 : ensemble de définition et position relative par rapport à la tangente.

Dans chacun des cas suivants :

1) préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de de f ;
2) déterminer l'équation réduite de $\mathcal{T}_a$, tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a ;
3) étudier les positions relatives de $\mathcal{T}_a$ et $\mathcal{C}_f$.

   a) $f : x \mapsto x^2 + 4x + 1$, $a = 2$
   b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$, $a = 1$
   c) $f : x \mapsto x^3 - 2x$, $a = 0$
   d) $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x + 3$, $a = 0$
   e) $f : x \mapsto x^4 - 2x^2 - x + 1$, $a = -1$
   f) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$, $a = 0$
   g) $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - x + 1$, $a = 2$. Pour l'étude des positions relatives, on pourra factoriser l'expression $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ à l'aide d'un logiciel.

Exercice 8 : fonction dérivable à droite de 0.

Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Démontrer qu'en $a = 0$, f est dérivable à droite, mais pas à gauche.

Exercice 9 : fonction dérivable et problème.

Téléchargé sur https://maths-pdf.fr

Soit f une fonction dérivable en a. Alors :

$$\frac{f(a-h)-f(a)}{h} \underset{h \to 0}{\to} \cdots$$

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $f(-x) = f(x)$ (on dit que f est paire).

1) Soit $M(a\ ;\ f(a))$ et $N(-a\ ;\ f(-a))$. Quel est le lien géométrique entre M et N ?

2) En utilisant le résultat de la question **1)**, démontrer que pour tout réel a : $f'(-a) = -f'(a)$.

3) Que peut-on alors dire de $f'(0)$?

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $f(-x) = -f(x)$ (on dit que f est impaire).

4) Soit $M(a\ ;\ f(a))$ et $N(-a\ ;\ f(-a))$. Quel est le lien géométrique entre M et N ?

5) Démontrer que pour tout réel a : $f'(-a) = f(a)$.

Fonction dérivable et problème

Exercice 10 : signe de f' et sens de variation.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est $f'(x) = (x-1)(x-2)$.
Donner le sens de variation de f.

Donner le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$.

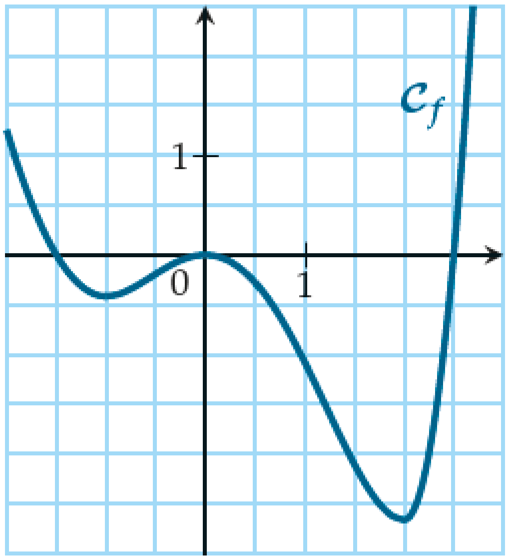
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
f		$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donner le signe de $f'(x)$.

Exercice 11 : résoudre graphiquement des inéquations.

Soit f une fonction dérivable sur $[-2\ ;\ 3]$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous.



1) Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $f(x) > 0$ **c)** $f'(x) > 0$

b) $f(x) < 0$ **d)** $f'(x) < 0$

2) Existe-t-il un lien entre le signe de $f(x)$ et celui de $f'(x)$?

3) Résoudre graphiquement les équations :

a) $f(x) = 0$ **b)** $f'(x) = 0$

Exercice 12 : donner une allure possible de la courbe.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On donne, pour certaines valeurs de x, la valeur de $f(x)$ et le nombre dérivé de f en x.

x	-2	0	3	5
$f(x)$	-2	-1	4	2
$f'(x)$	-1	1	0	-2

Donner une allure possible de la courbe.

Exercice 13 : calcul de la dérivée et équation de la tangente.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Démontrer que, pour tout réel a, $f'(a) = 2a + 3$.

2) Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.

3) Existe-t-il une tangente en un point de $\mathcal{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y = -2x + \sqrt{17}$?

4) Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact entre cette tangente et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 14 : algorithme et tangente à une courbe.

Voici une capture d'écran du logiciel Maxima.

```
(%i1) f(x):=1/(x+3);
(%o1) f(x):= 1/(x+3)
(%i2) (f(a+h)-f(a))/h, ratsimp;
(%o2) -1/((a+3)h+a^2+6a+9)
```

1) En utilisant la réponse « %o2 » du logiciel, donner l'expression de $f'(a)$.

2) Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 5$? Si oui, préciser les coordonnées du point de contact.

Exercice 15 : ensemble de définition et équation réduite de la tangente.

Téléchargé sur https://maths-pdf.fr

Dans chacun des cas suivants :

1) donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f ;
2) calculer $f'(a)$ à l'aide des formules de dérivation du cours ;
3) déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

a) $f : x \mapsto x^3$, $a = -2$

b) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = \dfrac{1}{4}$

c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $a = \dfrac{1}{2}$

d) $f : x \mapsto x^4$, $a = -2$

e) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = 1$

f) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $a = 4$

Exercice 16 : calculer la dérivée de x^n.

Toutes les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$.

1) Rappeler les dérivées de $f : x \mapsto x$ et de $f : x \mapsto x^2$.
2) Soit $f : x \mapsto x^3$. En remarquant que $x^3 = xx^2$, déterminer $f'(x)$.
3) Soit $f : x \mapsto x^4$. En remarquant que $\dots$, déterminer $f'(x)$.
4) Soit $f : x \mapsto x^5 \dots$
5) Continuer tant que vous ne savez pas répondre la question suivante.
6) Pour tout $n \geq 0$, conjecturer la dérivée de $f : x \mapsto x^n$.

> Cette formule, bien que vraie, N'est PAS démontrée, il ne s'agit pour l'instant que d'une conjecture. La suite de la démonstration sera faite en classe de Terminale.

Exercice 17 : compléter le squelette de l'algorithme.

On souhaite écrire un algorithme affichant, pour une fonction, sa dérivée et un réel a donnés, le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a. Compléter le squelette de l'algorithme suivant.

1. *Liste des variables utilisées*
2. ... : ...
3. *Entrées*
4. Demander ...
5. *Traitement*
6. Donner à `m` la valeur de ...
7. Donner à `p` la valeur de ...
8. *Affichage*
9. Afficher ...
10. Afficher ...
11. *Fin de l'algorithme*

Exercice 18 : déterminer la tangente à une parabole.

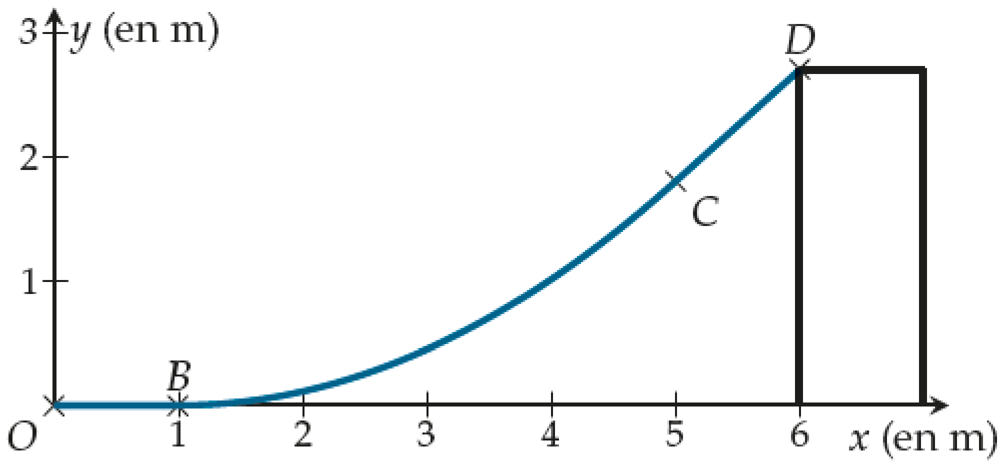
On considère la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois réels.

1) Déterminer a, b et c dans chacun des cas suivants :
   a) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 2x + 3$ et $\mathcal{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(3 ; 6)$;
   b) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 5 a pour équation $y = 3x - 3$ et la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -5 a pour équation $y = -x - 3$.
2) Question ouverte
   Étant donnés deux points et deux droites de coefficients directeurs donnés passant par chacun de ces deux points, discuter la possibilité de trouver une parabole admettant ces droites comme tangentes en ces points.

Exercice 19 : déterminer les nombres a,b et c pour une rampe de skateboard.

Une rampe de skateboard est modélisée de la manière suivante :

- une partie horizontale sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$;
- un arc de parabole sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$ représentant la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$;
- un segment de droite sur l'intervalle $[5\ ;\ 6]$ avec $C(5\ ;\ 1,8)$ et $D(6\ ;\ 2,7)$;
- le raccordement aux points B et C se fait sans cassure.



À l'aide des renseignements fournis, déterminer les valeurs de a, b et c.

Exercice 20 : fonction dérivable sur R.

Téléchargé sur https://maths-pdf.fr

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, $A(-1\ ;\ 3)$ un point de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}_A$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A. Déterminer $f'(-1)$ lorsque $\mathcal{T}_A$ passe aussi par le point :

1) $O(0\ ;\ 0)$? **2)** $B(1\ ;\ 3)$? **3)** $C(2\ ;\ 5)$?

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x^2 + 3$
2) $g(x) = x^3(x+2)$
3) $h(x) = \dfrac{1}{x^4}$
4) $i(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

Exercice 21 : dérivabilité en a et taux de variation.

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$, où a est un réel donné, puis déterminer si f est dérivable en a. Lorsque c'est le cas, donner $f'(a)$.

1) $f(x) = 2x - 7$, $a = 3$

2) $f(x) = mx + p$, $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, a réel quelconque

3) $f(x) = -3x^2$, $a = 2$

4) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $a = 1$

5) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $a = 1$

Même consigne

1) $f(x) = -x^2 + 7x$, $a = 2$

2) $f(x) = x^3$, $a = 4$

3) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $a = -2$

4) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$, $a = 4$

Exercice 22 : déterminer l'équation réduite de la tangente en a.

Téléchargé sur https://maths-pdf.fr

Dans chacun des cas suivants, déterminer, lorsque cela est possible, l'équation réduite de la tangente en a sous la forme $y = mx + p$.

1) $f : x \mapsto -x^2 + x + 1$, $a = -1$

2) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = 4$

3) $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $a = 0$

4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $a = -2$

Même consigne

1) $f : x \mapsto 3x^2 - x - 1$, $a = 2$

2) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $a = -1$

3) $f : x \mapsto x^3$, $a = 2$

4) $f : x \mapsto x^2 + x + 1$, $a = 0$

Exercice 23 : nombre dérivé et tangente.

Soit f telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = 3$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Le taux d'accroissement en a de la fonction f définie par $f(x) = (x-5)^3$ est égal à :

$$h^2 + (3a - 15)h + 3a^2 - 30a + 75.$$

Quel est son nombre dérivé en a ?

Quel est le nombre dérivé de :

1) la fonction inverse en 4 ?

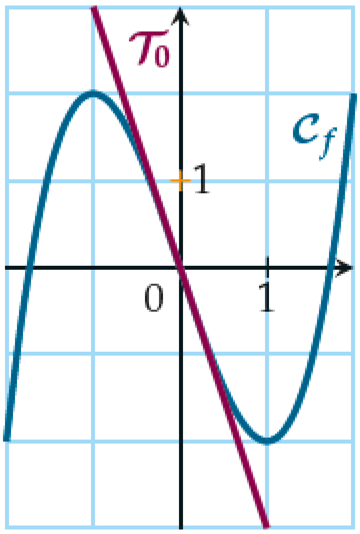
2) la fonction carré en -2 ?

3) la fonction racine carrée en $\dfrac{1}{4}$?

4) la fonction cube en -1 ?

Exercice 24 : signe du nombre dérivé d'une fonction.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2\ ;\ 2]$, représentée ci-dessous. $\mathcal{T}_0$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en l'origine.



1) Que valent $f(0)$ et $f'(0)$?
2) En quelle(s) valeur(s) le nombre dérivé de la fonction est-il nul ?
3) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il négatif ?
4) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il positif ?

Exercice 25 : qCM sur la dérivée.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

a) $f'(x) = 2x + 1$
c) $f'(x) = 2x$
b) $f'(-1) = -1$
d) $f'(0) = 0$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

a) $f'(0) = 0$
c) $f'(x) = -3x^2$
b) $f'(1) = -1$
d) $f'(x) = -x^2$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(4x + 2)$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

a) $f'(x) = g'(4x + 2)$
c) $f'(x) = 4g'(4x + 2)$
b) $f'(x) = -4g'(4x + 2)$
d) $f'(x) = 4g'(x)$

Exercice 26 : qCM sur la dérivation.

Téléchargé sur https://maths-pdf.fr

Soit la fonction f définie sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}(\sqrt{x}-1)$. Alors f est dérivable sur I et :

a $f'(x) = -\frac{1}{2x^2\sqrt{x}}$

b $f'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2x^3}$

c $f'(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2x^2}$

d $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{2x^2}$

Soient les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

a $g' = \frac{1}{f'}$

b $g' = -\frac{f'}{f^2}$

c $g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

d $g'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$

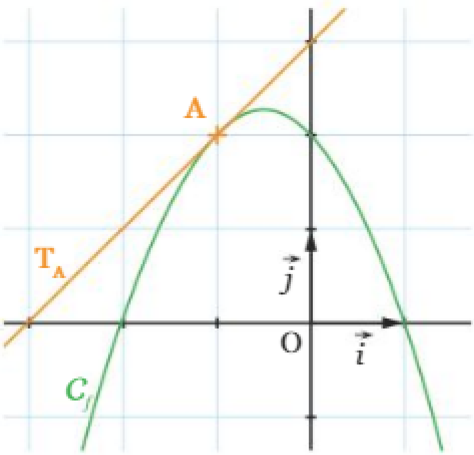
Exercice 27 : limite du taux d'accroissement.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 2. Soit h un réel non nul. Le nombre dérivé de f en 2 est égal à -1.

Peut-on écrire que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(h)}{h} = -1$?

Exercice 28 : nombre dérivé et tangente.

C_f est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. $\mathrm{T_A}$ est la tangente à C_f en A.



1. Lire graphiquement le nombre dérivé de f en -1.

2. Déterminer une équation de la tangente $\mathrm{T_A}$.

Exercice 29 : taux de variation.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Soit $h \neq 0$ et $h \neq -3$.

1. Montrer que le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ est égal à $-\dfrac{1}{3(3+h)}$.

2. En déduire que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

Exercice 30 : tangente à une courbe.

Exercice 31 : dérivabilité en un point.

Exercice 32 : dérivabilité en 3.

Exercice 33 : déterminer graphiquement le nombre dérivé.

Exercice 34 : déterminer graphiquement f ' (a).

Exercice 35 : calculer f ' (a).

Exercice 36 : calculer le nombre dérivé en a.

Exercice 37 : coefficient directeur de la tangente.

Exercice 38 : tracer une courbe représentative.

Téléchargé sur https://maths-pdf.fr

Exercice 39 : tangentes et parallèles.

Exercice 40 : déterminer l'équation réduite d'une tangente.

Exercice 41 : problème du projectile.

Exercice 42 : donner l'équation réduite d'une tangente.

Exercice 43 : calculer la dérivée d'une fonction.

Exercice 44 : déterminer la fonction dérivée.