Exercices sur la fonction exponentielle .

Exercice 1 : position relative de courbes et étude.

f, g, h sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-2x}, \quad g(x) = e^{-3x} \quad \text{et} \quad h(x) = e^{-x^2}.$$

$\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont les courbes représentatives respectives de f, g et h dans un repère.

a) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 2 : fonction et étude de la position relative de la courbe.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^4}$.

Dans un repère, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

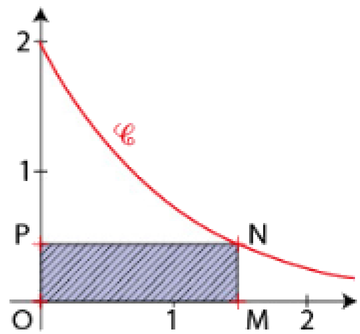
Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T.

Exercice 3 : aire maximale d'un rectangle et fonctions.

f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2e^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'origine O.

On inscrit un rectangle OMNP entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ comme le montre la figure ci-contre.

Déterminer les dimensions du rectangle OMNP d'aire maximale.



Exercice 4 : la température d'ébullition de l'eau et exponentielle.

Après ébullition, on vide l'eau d'une casserole, puis on la place dans l'évier rempli d'eau à 45 °C.
On modélise la température de la casserole en posant :
$T(t) = 55\exp(-0,2t) + 45$ où t est le temps (en s) et $T(t)$ la température de la casserole (en °C).

1. Déterminer la température de la casserole lorsqu'on la plonge dans l'évier.

2. On admet que la vitesse de refroidissement est la fonction dérivée de la fonction T.

a) Montrer que la vitesse de refroidissement de la casserole est proportionnelle à l'écart de température entre l'eau de l'évier et la casserole.

b) Déterminer ce coefficient de proportionnalité.

3. Déterminer, au degré près, la température de la casserole après 5 minutes dans l'évier.

Exercice 5 : simplifier des exponentielles et écrire l'expression.

Dans chaque cas, écrire l'expression avec une seule exponentielle.

a) $e^4 \times e^6$ **b)** $e \times (e^5)^2$ **c)** $\dfrac{e^{30} \times e^{-10}}{e^{10}}$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -xe^x$.
Déterminer le signe de $f(x)$ suivant x.

a désigne un nombre réel.
Simplifier l'écriture de chaque expression.

a) $e^{2a} \times e^{-a}$ **b)** $\dfrac{e^{2a}+1}{e^{1-a}}$ **c)** $(e^a)^3 \times e$

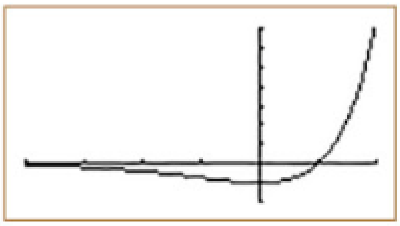
Exercice 6 : relation fonctionnelle et conjecture.

1. Prérequis : • La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

• La relation fonctionnelle.

Exprimer e^x sous la forme d'un carré ; en déduire que la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2. Sur l'écran de calculatrice ci-contre, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^x$.



(*Fenêtre* : $-4 \leqslant X \leqslant 2$, pas 1 et $-1 \leqslant Y \leqslant 7$, pas 1.)

a) Conjecturer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

b) Démontrer la conjecture émise au **a)**.

Exercice 7 : fonction rationnele avec une exponentielle.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{e^x + 1}.$$

a) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(-x) + f(x) = 2.$$

c) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f dans un repère ?

Exercice 8 : vrai ou faux avec les propriétés de l'exponentielle.

Vrai ou faux

Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

a) Pour tout nombre réel x, $e^{x^2} = e^x \times e^x$.

b) Il existe un nombre réel x tel que $e^{x^2} = e^x \times e^x$.

c) Pour tout nombre réel x, $e^x \geqslant x + 2$.

d) Il existe un nombre réel x tel que $e^x \geqslant x + 2$.

Exercice 9 : axe de symétrie et position relative d'une courbe.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x} + e^{-x} - 2.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.

1. Démontrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

2. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \frac{(e^{x} - 1)^{2}}{e^{x}}.$$

b) En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 10 : le tracé d'une courbe et signe de f(x).

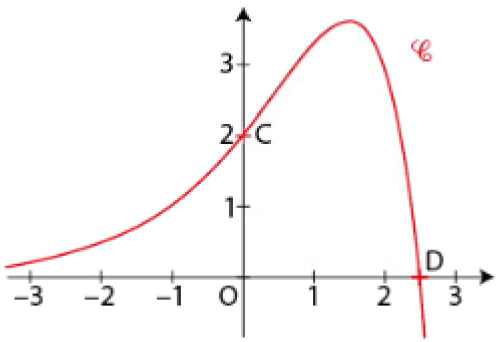
a et b désignent deux nombres réels ($a \neq 0$).

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{x}$.

1. a) Déterminer $f(0)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2. Voici le tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère.

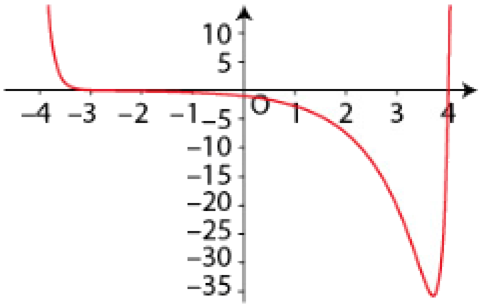


a) Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $C(0\,;2)$ et $D\left(\frac{5}{2}\,;0\right)$, déterminer a et b.

b) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Exercice 11 : conjecturer le signe de f(x).

Dans le repère ci-dessous, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2-12} - e^x$.



a) Conjecturer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

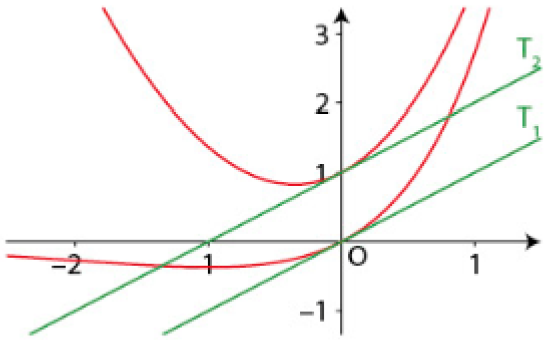
b) Démontrer la conjecture émise au **a)**.

Exercice 12 : conjecture sur les tangentes à la courbe d'une fonction.

Dans le repère ci-dessous, sont représentées les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + e^x$$

ainsi que la tangente à chaque courbe au point d'abscisse 0.



a) Que peut-on conjecturer pour ces tangentes ?

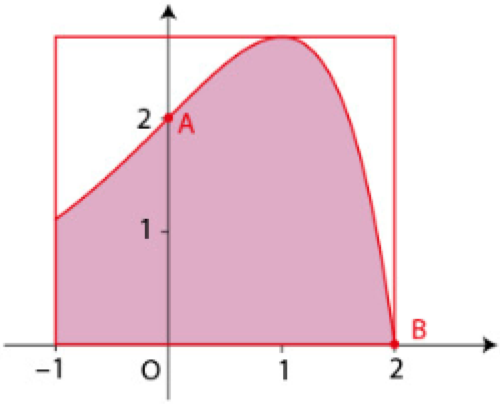
b) Démontrer cette conjecture par un calcul.

Exercice 13 : une menuiserie qui débite des profilés.

La menuiserie PROBOIS doit débiter des profilés obtenus à l'aide d'une courbe $\mathscr{C}$.
Dans un repère orthonormé d'unité 10 cm, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1;2]$ par :

$$f(x) = (ax + b)\,e^x$$

où a et b désignent des nombres réels fixés.



Pour obtenir ces pièces, la menuiserie dispose de planches de section 30 cm sur 300 cm.
Combien de profilés peut-elle fabriquer dans l'une de ces planches ? Justifier par un calcul.

Exercice 14 : une égalité et une fonction.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}.$$

Exercice 15 : démontrer une inégalité avec exponentielles.

Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$e^x - 2 + e^{-x} \geqslant 0.$$

Exercice 16 : calculatrice et exponentielle.

Utiliser la touche $\boxed{e^x}$ de la calculatrice pour donner l'arrondi au millième de $\frac{e^2}{1+e^{-3}}$.

Exercice 17 : tableau de variation et équation de la tangente.

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle et T_1 est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

1. Déterminer une équation de la tangente T_1.

2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - ex.$$

a) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.

b) En déduire le signe de $g(x)$.

c) Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T_1.

Exercice 18 : position relative de la tangente à une courbe.

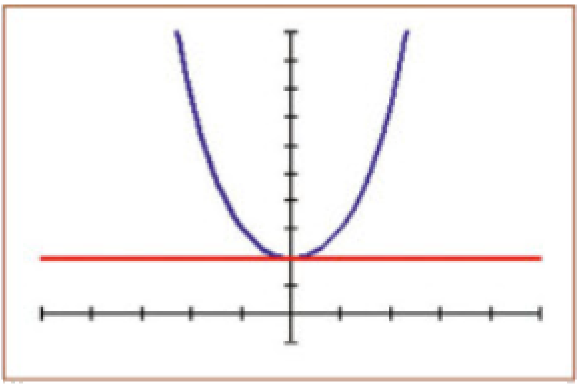
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$. Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f et T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

a) Déterminer une équation de la tangente T.

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T.

Exercice 19 : position relative de la courbe et de la tangente.

Voici la courbe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x + e^{-x}$.
(*Fenêtre* : $-5 \leqslant X \leqslant 5$, pas 1 et $-1 \leqslant Y \leqslant 10$, pas 1.)
Justifier la position relative de la courbe et de la tangente affichées.



Exercice 20 : conjecturer à l'aide de la calculatrice.

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x^2+2x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

Dans un repère, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de ces fonctions.

1. a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la fonction f.

b) Valider cette conjecture.

2. a) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 21 : simplifier des expressions avec des exponentielles.

Simplifier chacune des expressions.

a) $(e^x)^5 \times e^{-2x}$

b) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$

c) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$

Exercice 22 : démontrer une égalité avec des exponentielles.

Démontrer que, pour tout nombre réel x,

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}=e^x\times\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}.$$

Exercice 23 : démontrer que la fonction est constante.

y est un nombre réel fixé et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\exp(x+y)\times\exp(-x).$$

a) Démontrer que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que, pour tout nombre réel x,

$$h(x)=\exp(y).$$

c) Retrouver alors, que pour tous nombres réels x et y,

$$\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y).$$

Exercice 24 : fonction dérivée et exponentielle.

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\exp(x)+\exp(-x)\quad\text{et}\quad g(x)=\exp(x)-\exp(-x).$$

a) Déterminer la fonction dérivée de chacune de ces fonctions.

b) Expliquer pourquoi, pour tout nombre réel x :

- $f(x)=\dfrac{[\exp(x)]^2+1}{\exp(x)}$
- $g(x)=\dfrac{(\exp(x)-1)(\exp(x)+1)}{\exp(x)}$
- $f^2(x)-g^2(x)=4$

Exercice 25 : donner l'expression avec une seule exponentielle.

1. a désigne un nombre réel.

Dans chaque cas, écrire l'expression avec une seule exponentielle.

a) $(e^{2a+1})^3 \times (e^{-3a})^2$

b) $\dfrac{e^{2-3a}}{e^{1+a}}$

c) $\dfrac{e^{3a+1}}{e^{a} \times e}$

2. Démontrer, que pour tout nombre réel x :

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^{x} - 1}{e^{2x}}.$$