Exercices sur les fonctions sinus et cosinus .

Exercice 1 : f dérivable et tableau de variation.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1) Démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) Établir que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

3) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 2 : déterminer les limites suivantes.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin x}$ où $a \in \mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x}$

Exercice 3 : résoudre les équations.

Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :

1) $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

2) $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

3) $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{4}$

4) $\cos x = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

5) $2\cos 2x = 1$

6) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\cos 2x = \cos x$

8) $\sin 3x = \cos x$

Exercice 4 : une étude de la dérivabilité de la fonction cosinus.

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2\cos x}{2x-\pi} \text{ pour } x \neq \frac{\pi}{2}.$$

En étudiant la dérivabilité de la fonction cosinus en $\frac{\pi}{2}$, déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$.

Exercice 5 : fonction homographique et polynôme.

On considère les types de fonctions suivantes :

1) affine $x \mapsto ax+b$
2) polynôme du second degré $x \mapsto ax^2+bx+c$
3) homographique $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$
4) polynôme du troisième degré $x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$

Pour chaque type, à quelle condition a-t-on :

- une fonction paire ?
- une fonction impaire ?

Exercice 6 : exprimer les nombres en fonction de cosx et sinx.

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

1) a) $\sin(3\pi+x)$

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$

c) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

2) a) $\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

b) $3\sin(\pi+x)-2\sin(\pi-x)+4\sin(x-\pi)$

Exercice 7 : simplifier les cos et sin suivants.

Simplifier les expressions suivantes :

1) $\cos(x-\pi)$

2) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

4) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 8 : déterminer la valeur de cosinus et sinus.

1) Étant donné que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 9 : simplifier et résoudre des équations.

Téléchargé sur https://maths-pdf.fr

1) Simplifier l'expression suivante :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

2) Établir l'égalité suivante :

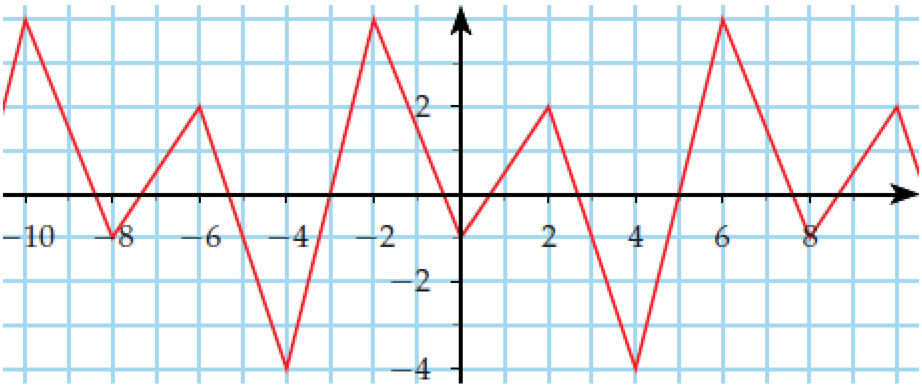
$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{(\sin 3x)^2}{\sin 2x \sin x}.$$

3) Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}.$$

Exercice 10 : déterminer les coordonnées d'un vecteur.

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T représentée dans le repère suivant.



1) a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ telles que $\mathscr{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}$.

b) Déterminer la valeur de T.

2) Donner l'image par f des entiers : 14, −16, 56 et 58.

Exercice 11 : vérifier que la fonction est T-Périodique.

Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1) $f : x \mapsto \sin(6x - 3)$ $\qquad T = \dfrac{\pi}{3}$

2) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad T = \pi$

3) $f : x \mapsto \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad T = \pi$

4) $f : x \mapsto \left(4\cos^2 x - 3\right)\cos x$ $\qquad T = \dfrac{2\pi}{3}$

Exercice 12 : fonction paire ou impaire.

On rappelle que, sur un ensemble $\mathscr{D}$ symétrique par rapport à 0, une fonction est :

- paire si, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(-x) = f(x)$;
- impaire si, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

- $f_1 : x \mapsto x^2 + 4$
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{1 + x^2 + x^4}{x(x^2 + x^4)}$
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$
- $f_5 : x \mapsto \lfloor x \rfloor$
- $f_6 : x \mapsto |x|$
- $f_7 : x \mapsto \cos x + \sin x$
- $f_8 : x \mapsto \cos(x + \pi)$

Exercice 13 : périmètre du rectangle et calcul formel.

On reprend la situation de l'exercice 1.

$p(x)$ désigne le périmètre du rectangle OPMQ.

a) Exprimer $p(x)$ en fonction de x.

b) Utiliser cet écran de calcul formel pour déterminer l'extremum de la fonction p sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

```
1 supposons(x>=0 et x<=pi/2);deriver(cos(x)+sin(x))
      (x, -sin(x)+cos(x) )                          M
2 resoudre(-sin(x)+cos(x)>=0)
      [(x>=0)and (x<=π/4)]                          M
```

Exercice 14 : dresser le tableau de variation.

f est la fonction définie sur $[-\pi ; \pi]$ par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 15 : déterminer la fonction dérivée.

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies sur I par :

a) $f(x) = \cos(2x)$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

b) $g(x) = x\cos x$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

c) $h(x) = \cos^2 x$ $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

d) $i(x) = \dfrac{2}{\sin x}$ $\quad \mathrm{I} =]0 ; \pi[$

e) $j(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \mathrm{I} = \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 16 : conjecturer avec la calculatrice une limite.

f est la fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}.$$

Conjecturer avec la calculatrice la limite de f en 0, puis démontrer cette conjecture.

Exercice 17 : convergence de suites et cosinus.

1) Soit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_n = \dfrac{2n^2 + \cos n}{3n^2 + 5}$.
Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

2) Soit la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $v_n = \dfrac{\cos n - 2n}{\sqrt{n}}$.
Montrer que (v_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 18 : cosinus et sinus avec tableau de variation.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x.$$

1) Démontrer que f est périodique de période 2π.
2) Démontrer que $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
3) Démontrer que f est décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{5\pi}{6}\right]$, croissante sur $\left[\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{11\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{11\pi}{6}\,;\,2\pi\right]$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\,2\pi]$.

Exercice 19 : démontrer la dérivée nième d'une fonction.

On note $f^{(0)} : x \mapsto \cos x$ la fonction cosinus, $f^{(1)}$ la dérivée de $f^{(0)}$, $f^{(2)}$ la dérivée de $f^{(1)}$, $f^{(3)}$ la dérivée de $f^{(2)}$, etc. On nomme $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

1) a) Calculer $f^{(1)}(x)=f'(x)$, $f^{(2)}(x)=f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

2) Prouver la formule analogue pour la fonction sinus.

Exercice 20 : valeurs où la dérivée s'annule.

Déterminer les valeurs où la dérivée des fonctions suivantes s'annule.

1) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

2) $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}$ définie sur $\left]-\sqrt{2}\,;\ \sqrt{2}\right[$.

3) $h : x \mapsto \dfrac{\cos x + 2}{\sin^2 x + 2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 : montrer que f est dérivable.

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$ et que :

$$f'(x) = \frac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\left(2 + \sqrt{x}\right)^2}.$$

2) Résoudre l'équation $X^2 + 4X - 1 = 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$.

3) Dresser le tableau de variation complet de f.

Exercice 22 : une équation de la tangente à la courbe.

Écrire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0.

1) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+4}$ $\qquad x_0 = 1$

2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ $\qquad x_0 = -\dfrac{1}{2}$

3) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x+1)^3}$ $\qquad x_0 = 2$

Exercice 23 : montrer que f admet un minimum.

Soit la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x+3}}.$$

1) Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f.
2) Montrer que, là où f est dérivable :

$$f'(x) = \frac{(x+1)(3x+11)}{2(x+3)\sqrt{x+3}}.$$

3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Montrer que f admet un minimum sur son ensemble de définition.

Exercice 24 : justifier que f est dérivable sur I.

Soit f une fonction définie sur I par $f(x)$.
Justifier que f est dérivable sur I puis calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \dfrac{5}{3\,(x-2)^4}$ $\quad I =]2\,;\,+\infty[$
2) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$ $\quad I =]-1\,;\,+\infty[$
3) $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$ $\quad I =]2\,;\,+\infty[$
4) $f(x) = (x-2)^3 + \dfrac{1}{(2x-1)^3}$ $\quad I = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

Exercice 25 : calculer la dérivée de fonctions contenant cos x et sin x.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = x^2 + \cos x$

2) $f(x) = \sin 2x$

3) $f(x) = \cos x \sin x$

4) $f(x) = \sin^2 x$

5) $f(x) = x^2 \cos x$

6) $f(x) = \cos^2 x$

7) $f(x) = \sin x + \cos x$

8) $f(x) = \dfrac{2\cos x + 3}{2\cos x - 3}$

Exercice 26 : changement de variable et calcul de limite.

En opérant le changement de variable $X = x + \dfrac{\pi}{4}$, déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$.

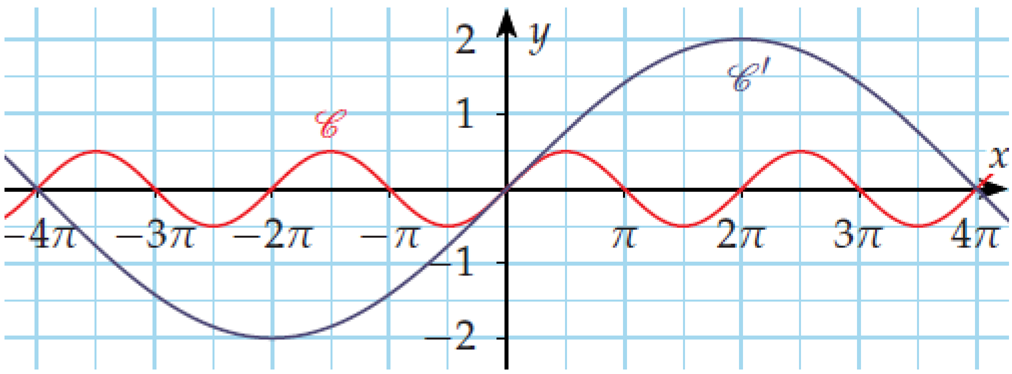
Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^2}$

2) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{2}{\pi}} \frac{\pi x - 2}{\cos \frac{1}{x}}$

Exercice 27 : courbes d'équations du type y=asin(wx).

Les deux courbes suivantes ont une équation du type $y = a \sin \omega x$. Retrouver a et ω dans chaque cas.



Exercice 28 : pour les affirmations suivantes, démêler le vrai du faux.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Parmi les affirmations suivantes, démêler le vrai du faux. Justifier.

1) $f'(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) f est strictement monotone sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$

4) $f(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 29 : déterminer l'ensemble de dérivabilité.

Déterminer l'ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}'$ de chaque fonction et calculer sa dérivée sur $\mathscr{D}'$:

1) $f : x \mapsto \sqrt{3x - 7}$

2) $g : x \mapsto (5x^3 - 3)^2$

3) $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x+6)^3}$

4) $a : x \mapsto \left(1 - 2\sqrt{x}\right)^2$

5) $b : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$

6) $c : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{10 - x}}$

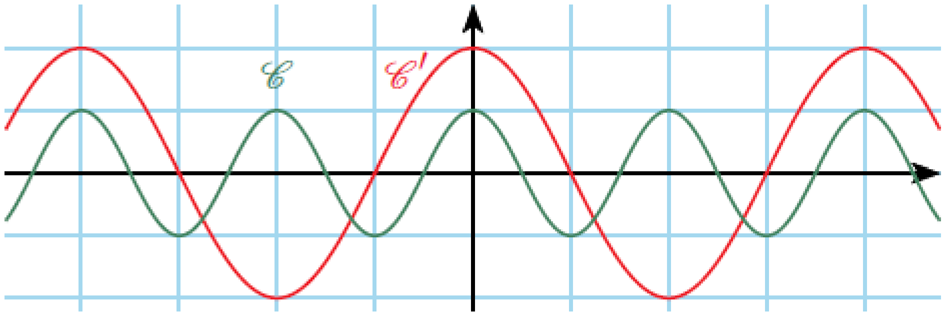
Exercice 30 : fonction cosinus et représentations graphiques.

Téléchargé sur https://maths-pdf.fr

Soit deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos x \text{ et } g(x) = \cos 2x.$$

représentées dans le repère ci-dessous.
Associer chaque courbe à sa fonction. Justifier.



Exercice 31 : résoudre sur I l'équation donnée.

Résoudre sur I l'équation donnée.

1) $\cos t = \cos \frac{\pi}{6}$ $\quad I = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

2) $\sin t = \sin \frac{\pi}{3}$ $\quad I =]-\pi ; \pi]$

3) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad I = [0 ; 2\pi]$

Exercice 32 : fonction définie et dérivable en x0.

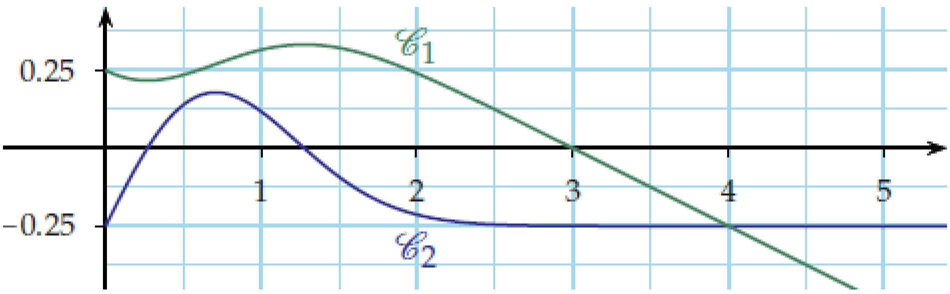
Soit f une fonction définie et dérivable en x_0 de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère.
Calculer $f(x_0)$ et $f'(x_0)$, puis donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0.

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 7}{x^2 + 1}$ $\qquad x_0 = 1$
2) $f(x) = (2x - 1)^{11}$ $\qquad x_0 = 0$
3) $f(x) = 3x - 2\sqrt{-x} - \dfrac{5}{x}$ $\qquad x_0 = -1$
4) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$ $\qquad x_0 = 2$
5) $f(x) = \cos 2x$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 33 : associer chaque courbe à sa fonction.

Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ tracées ci-dessous sur $[0\ ;\ +\infty[$ représentent les fonctions h et H telles que h est la dérivée de H c'est-à-dire que $H' = h$.

Associer chaque courbe à sa fonction. Justifier.



Exercice 34 : vérifier que la fonction f est T-périodique.

Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1) $f : x \mapsto \sin(10\pi x)$ $\quad T = 0,2$

2) $f : x \mapsto \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad T = \frac{\pi}{2}$

3) $f : x \mapsto \sin\left(\frac{10x - 1}{3}\right)$ $\quad T = \frac{3\pi}{5}$

4) $f : x \mapsto \frac{2}{5}\cos(3\pi x)$ $\quad T = \frac{2}{3}$

Exercice 35 : déterminer l'ensemble de dérivabilité.

Soit f une fonction définie par $f(x)$. Déterminer son ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}'$, puis calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = x^3 - 3 + 3\sqrt{x}$

2) $f(x) = \left(4x^3 + 2x - 1\right)^4$

3) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

4) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3$

5) $f(x) = \cos(5x - 2)$

6) $f(x) = (\sin 5x)^2$