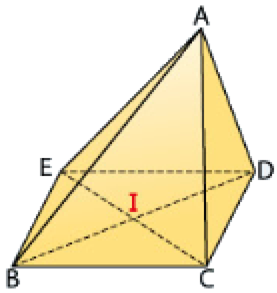
Exercices sur les vecteurs .

Exercice 1 : pyramide de sommet A et vecteurs.

ABCDE est une pyramide de sommet A dont la base est un parallélogramme BCDE de centre I.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

b) Démontrer que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$.



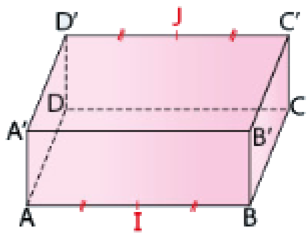
Exercice 2 : parallélépipède rectangle et égalité de vecteurs.

ABCDA'B'C'D' est le parallélépipède rectangle ci-contre.

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [C'D'].

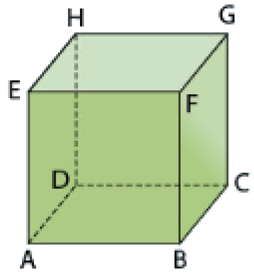
a) Justifier que : $\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{BC'}=2\overrightarrow{BJ}$.

b) Démontrer que : $\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BC'}=4\overrightarrow{IJ}$.



Exercice 3 : cube et milieux d'arêtes.

ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.



Démontrer que :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}.$$

I est le milieu de l'arête [FG].
Quel est le point M tel que :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}\ ?$$

Quel est le vecteur $\vec{u}$ tel que :

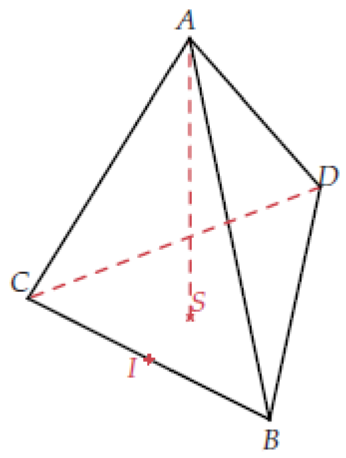
$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{FB}+\vec{u}=\vec{0}\ ?$$

J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [AE].
Quel est le point M tel que :

$$\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{KB}\ ?$$

Exercice 4 : démontrer que la droite est orthogonale au plan.

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et I le milieu de $[BC]$.



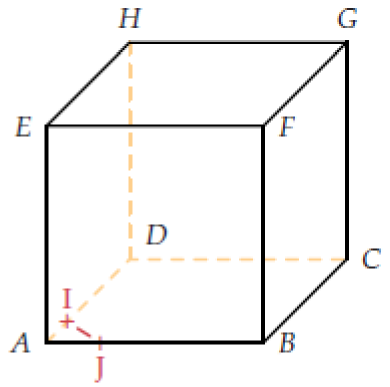
1) Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (ADI).

2) En déduire que $(BC) \perp (AD)$.

Le plan (ADI) est le plan orthogonal au segment $[BC]$ et passant par son milieu. Il est appelé plan médiateur du segment $[BC]$. Tous les points de ce plan sont équidistants de B et de C.

Exercice 5 : les propositions sont-elles vraies ou fausses ?.

$ABCDEFGH$ est un cube et I ; J et K les points tels que : $I \in [AD]$ et $AI = \dfrac{1}{3}AD$; $J \in [AB]$ et $AJ = \dfrac{1}{3}AB$.



Les propositions sont-elles vraies ou fausse ?

Le démontrer.

1) (IJ) est orthogonale à (EC) ;
2) (IJ) est orthogonale à (BG) ;
3) (IJ) est orthogonale à (HB) ;
4) (IJ) est orthogonale à (HC).

Exercice 6 : déterminer la valeur de t pour laquelle la longueur est minimale.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ et I le milieu de $[AB]$.

1) Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace.
2) Placer un point M du segment $[AC]$ et $\wp$ le plan passant par I et orthogonal à la droite (IM).
3) Construire le point N intersection de $\wp$ et de la droite (OB).
4) Conjecturer la position du point M pour laquelle la distance MN est minimale.
5) Démonstration
   a) Soit t le réel tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AC}$. Exprimer les coordonnées de M en fonction de t. On admet que $N(0;t;0)$.
   b) Exprimer la longueur MN en fonction de t.
   c) Déterminer la valeur de t pour laquelle cette longueur est minimale.

Exercice 7 : déterminer les coordonnées du point M tel que la distance AM soit minimale.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1) Les points $A(5;2;6)$ et $B(5;-6;4)$ appartiennent-ils à la droite Δ ?
2) Déterminer les valeurs des réels a et b tels que le point $C(4;a;b)$ appartienne à Δ.
3) Soit $M(x;y;z) \in \Delta$. Exprimer AM^2 en fonction de t.
4) Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance AM soit minimale.

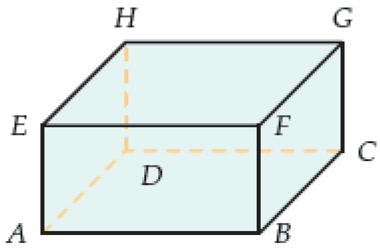
Exercice 8 : démontrer que la droite et le plan sont sécants.

Soient $A(-2;0;1)$, $B(1;2;-1)$ et $C(-2;2;2)$ trois points de l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
2) Soit $D(-2;-1;0)$ et $E(-2;5;2)$. Démontrer que la droite (DE) et le plan (ABC) sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 9 : déterminer la section du pavé par un plan.

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.
I, J et K sont les points tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$.

1) Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJG).
2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
3) Reproduire la figure et tracer la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (IJG). On ne demande pas de justification.

Exercice 10 : etudier la position de la droite.

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

1) $$\begin{cases} x = -k \\ y = 3 + 2k \\ z = 4 - k \end{cases} , k \in \mathbb{R}$$

2) $$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 3 - k \end{cases} , k \in \mathbb{R}$$

3) $$\begin{cases} x = k - 2 \\ y = 7 - 3k \\ z = 2 - k \end{cases} , k \in \mathbb{R}$$

Exercice 11 : déterminer la nature d'une intersection de plans.

Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2t' \\ y = 1 + 3t + t' \\ z = 2 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

Déterminer la nature de $\wp \cap \wp'$ dans chacun des cas suivants où $\wp'$ est définie par une représentation paramétrique :

1) $\begin{cases} x = -2 - 3t - t' \\ y = 2 - 2t + 4t' \\ z = 2 + 5t - 5t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} x = 4 - 3t + 5t' \\ y = -2t + t' \\ z = 5 + 5t - 5t' \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$

3) $\begin{cases} x = -3 + 2t + t' \\ y = 2 - t + 2t' \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$

Exercice 12 : déterminer l'intersection d'un plan et d'une droite.

Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R} \\ z = t - t' \end{cases}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection de $\wp$ avec la droite d donnée par une représentation paramétrique :

1)

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 5 - t \end{cases}$$

3)

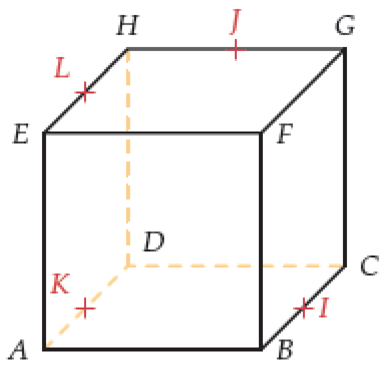
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = -3 + t \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 10t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = -3t \end{cases}$$

Exercice 13 : compléter les égalités vectorielles.

Pour les exercices , $ABCDEFGH$ est un cube et I ; J ; K et L les milieux respectifs de $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$.



Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1) $\overrightarrow{A...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
2) $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E...}$
3) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A...}$

Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1) $\overrightarrow{...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{L...} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AI}$
3) $\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JL}$

Exercice 14 : déterminer les coordonnées des points.

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-3;2;4)$; $B(-1;1;0)$ et $C(2;-3;5)$. Déterminer les coordonnées des points M, N et P définis par :

1) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
2) $\overrightarrow{NB} = 4\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{BC}$
3) $2\overrightarrow{PA} - 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

Exercice 15 : que peut-on dire des points A,B,C et D?.

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-4;2;3)$, $B(1;5;2)$, $C(0;5;4)$ et $D(-6;-1;-2)$.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

2) Que peut-on en déduire concernant les points A, B, C et D ?

Exercice 16 : montrer que des points définissent un plan.

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(0;3;-1)$, $B(2;-2;0)$, $C(4;1;5)$ et $D(2;21;12)$.

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2) Le point D appartient-il à ce plan ?

Exercice 17 : calcul avec des coordonnées dans l'espace.

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace,on considère les points $A(1;-1;-1)$, $B(5;0;-3)$, $C(2;-2;-2)$ et $D(0;5;-2)$.

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2) Le point D appartient-il à ce plan ?

Exercice 18 : démontrer à l'aide de coordonnées.

On reprend l'énoncé de l'exercice 42 en se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1) Écrire les coordonnées des points de la figure. On écrira les coordonnées de M en fonction de t.

2) Démontrer à l'aide des coordonnées que D, M et I sont alignés si et seulement si $t = \dfrac{4}{5}$.

Exercice 19 : ecrire une représentation paramétrique de la droite.

On considère les points $A(-3\ ;\ 2\ ;\ 4)$ et $B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Écrire une représentation paramétrique de la droite (AB).

Exercice 20 : donner un vecteur directeur et représentation paramétrique.

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1) Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.
2) Le point $M(-3\,;4\,;1)$ appartient-il à la droite Δ ?
3) Donner les coordonnées de trois points de la droite Δ.
4) Déterminer une autre représentation paramétrique de Δ.

Exercice 21 : donner les coordonnées de trois points.

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 4 \\ z = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1) Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.
2) Le point $M(-3\,;4\,;-3)$ appartient-il à la droite Δ ?
3) Donner les coordonnées de trois points de Δ.
4) Déterminer une autre représentation paramétrique de la droite Δ.

Exercice 22 : donner une représentation paramétrique de chacun des objets.

Soient $A(-4;1;2)$ et $B(-1;2;5)$. Donner une représentation paramétrique de chacun des objets géométriques suivants :

1) La droite (AB) ;
2) Le segment $[AB]$;
3) La demi-droite $[AB)$.

Exercice 23 : donner les coordonnées d'un couple de vecteurs.

Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 - t + 5t' \\ y = 1 + t' \\ z = -5t + 3t' \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

1) Donner les coordonnées d'un couple de vecteurs directeurs de $\wp$ et un point de $\wp$.
2) Le point $M(6;2;-6)$ appartient-il à $\wp$?
3) Donner les coordonnées de trois points de $\wp$.
4) Déterminer une autre représentation paramétrique de $\wp$.