Exercices sur limite de suites .

Exercice 1 : tableur et conjecture de l'expression de la suite en fonction de n.

v est la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = \frac{3}{n}(1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + \ldots + n \times (n-1)).$$

a) À l'aide du tableur, comparer v_n et n^2 pour les premières valeurs de n.

b) Conjecturer une expression de v_n en fonction de n.

c) En admettant la conjecture précédente, déterminer la limite de la suite v.

Tableur

Exercice 2 : donner la limite de chaque suite.

Donner la limite de chaque suite.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = -7n$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = e^{-n}$.

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$.

d) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{4}{n^2}$.

Exercice 3 : dire si la suite définie a pour limite l'infini.

Dans chaque cas, dire si la suite définie sur $\mathbb{R}$ a pour limite $+\infty$.

a) $u_n = 2 + 4n$

b) $v_n = -n + 3$

c) $w_n = \frac{1}{n^2 + 1}$

d) $t_n = 5n^3$

Exercice 4 : tableur et conjecture de la limite.

Les dix premiers termes de chaque suite u, v, w et t sont tabulés dans la feuille de calcul ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
v_n	1	0,125	0,03704	0,01563	0,008	0,00463	0,00292	0,00195	0,00137	0,001
w_n	-20	-120	-220	-320	-420	-520	-620	-720	-820	-920
t_n	1,008	1,00463	1,00292	1,00195	1,00137	1,001	1,00075	1,00058	1,00046	1,00036

Conjecturer la limite de chacune de ces suites.

Exercice 5 : calculatrice et limite de chacune des suites.

u et v sont les suites définies pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = -3 + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = 2n^3 + 1.$$

a) Tabuler les premiers termes de chaque suite u et v avec la calculatrice.

b) Conjecturer la limite de chacune des suites.

c) À partir de quel rang a-t-on :

- $u_n \in]-3,01; -2,99[$?
- $v_n \in]10^4 ; +\infty[$?

Exercice 6 : algorithme et suites numériques.

Algo u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sqrt{3n+4}.$$

Voici un algorithme :

Variables :	A, u sont des nombres réels
	n est un nombre entier naturel
Entrée :	Saisir A
Traitement :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 2
	Tant que $u \leqslant$ A
	n prend la valeur $n+1$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{3n+4}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a) Expliquer son rôle.

b) Coder l'algorithme dans un langage de programmation et tester le programme obtenu.

c) Exécuter le programme avec les valeurs successives saisies en entrée : $A=50$, $A=100$ et $A=500$. Conjecturer la limite de la suite u.

d) Démontrer cette conjecture.

Exercice 7 : démontrer que la suite converge.

u est la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = 5 - \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Démontrer avec la définition que la suite u converge.

Exercice 8 : sémontrer que la suite a pour limite l'infini.

w est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_n = n^2 - 2n - 3.$$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite w.

2. a) Vérifier que, pour tout nombre entier naturel n,

$$w_n = (n-1)^2 - 4.$$

b) Démontrer que la suite w a pour limite $+\infty$.

Exercice 9 : convergence d'une suite et étude.

1. u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^3 + n - 6.$$

a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 6$, $u_n \geqslant n^3$.

b) En déduire la limite de la suite u.

2. v est la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$v_n = \frac{(-1)^n \sin n}{n^2}.$$

Étudier la convergence de la suite v.

Exercice 10 : suite et preuve par récurrence.

v est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (n^2 - n)\sqrt{n}$.

a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $v_n \geqslant \sqrt{n}$.

b) En déduire la limite de la suite v.

Exercice 11 : conjecturer la limite d'une suite.

w est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_n = n^2 + \cos n.$$

a) Conjecturer la limite de la suite w.

b) Démontrer cette conjecture avec un théorème de comparaison.

Exercice 12 : suite rationnelle et limite.

t est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$t_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{n + 1}.$$

a) Démontrer que, pour tout n, $t_n = n + 1 + \frac{2}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite t.

Exercice 13 : convergence de la suite u.

u est la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = \frac{\cos n + \sin n}{n}.$$

Étudier la convergence de la suite u.

Exercice 14 : démontrer par récurrence et limite de la suite.

w est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$w_n = \frac{3n+1}{n+2}.$$

a) Vérifier que, pour tout n, $w_n = 3 - \frac{5}{n+2}$.

b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$3 - \frac{5}{n} \leqslant w_n \leqslant 3.$$

c) En déduire la limite de la suite w.

Exercice 15 : l'étude de la limite de la suite.

Dans chaque cas, étudier la limite de la suite définie sur $\mathbb{N}$.

a) $u_n = n^2 + 5n - 100$

b) $v_n = -n^3 + 6n + 3$

c) $w_n = \frac{n^2 - 3}{n^2 + 1}$

Exercice 16 : calcul formel Avec Xcas et limite obtenue.

Voici un écran de calcul formel obtenu avec le logiciel Xcas :

```
1 u(n):=2n-sqrt(n)
      n ->2*n-(√n)
2 limit(u(n),n,+infinity)
      +∞
```

Justifier la limite obtenue.

Exercice 17 : dans chaque cas, étudier la limite de la suite.

étudier la limite de la suite.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n}{n^2+3}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n^2+n+1}{n+1}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $w_n = \dfrac{5n}{1-n}$

Exercice 18 : démontrer que la suite u a pour limite l'infini.

u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2$.

Démontrer que la suite u a pour limite $+\infty$.

Exercice 19 : démontrer que la suite est convergente.

v est la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, par $v_n = 2 + \dfrac{1}{n}$.

Démontrer que la suite v est convergente.

Exercice 20 : démontrer que la suite converge vers 0.

1. u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 3$.

a) À partir de quel rang a-t-on $u_n > 10^3$?

b) Démontrer que la suite u a pour limite $+\infty$.

2. v est la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, par $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) À partir de quel rang a-t-on $-0{,}01 < v_n < 0{,}01$?

b) Démontrer que la suite v converge vers 0.

Exercice 21 : introduire une suite auxiliaire.

Introduire une suite auxiliaire

u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2}{e^n}$.

On se propose d'étudier la limite de la suite u.

Pour cela, on introduit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = nu_n.$$

a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{e}.$$

b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 3$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$.

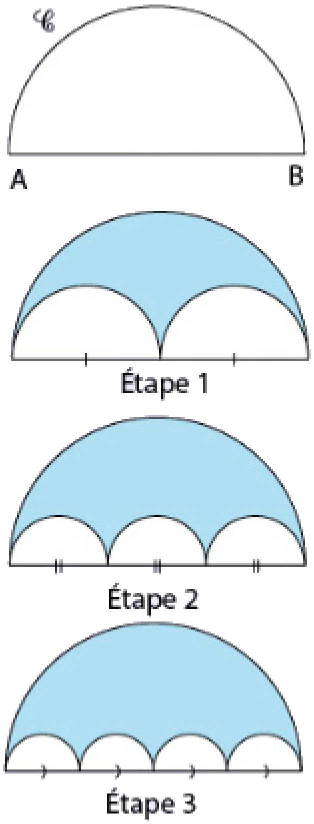
c) En déduire que, pour tout $n \geqslant 3$, $v_n \leqslant v_3$.

d) Déterminer alors la limite de la suite u.

Exercice 22 : une suite d'aires à étudier.

Étudier une suite d'aires

$\mathscr{C}$ est un demi-cercle de diamètre [AB] avec $AB = 10$ cm.
On partage successivement le segment [AB] en deux, trois, quatre, … segments de même longueur. À chaque étape, on construit sur les segments obtenus des demi-cercles et on s'intéresse à l'aire du domaine coloré en bleu.
On note, a_n l'aire du domaine coloré en bleu à la n-ième étape.
Étudier la limite de la suite (a_n).



Exercice 23 : comparer un et vn dans chaque cas.

Dans chaque cas :

- comparer u_n et v_n ;
- en déduire la limite de la suite u.

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n + 1$ et $v_n = n^2$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = -n - 1 + \cos n$ et $v_n = -n$.

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^3$.

Exercice 24 : donner la limite de v.

v est une suite telle que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{10}{n^2}$.
Donner la limite de la suite v.

Exercice 25 : peut-on penser que la suite converge vers 0 ?.

w est une suite telle que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, $w_n \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{n}}$.

Paul affirme : « La suite w converge vers 0. »

Que peut-on en penser ?

Exercice 26 : démontrer une égalité pour tout n.

u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + e^{3n^2+n}$.

a) Démontrer que, pour tout n, $u_n \geqslant n^2$.

b) Déduire de ce qui précède la limite de la suite u.

Exercice 27 : donner la limite de la suite w dans chaque cas.

Dans chaque cas, donner la limite de la suite w.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -3$, $w = u - v$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, $w = uv$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$, $w = \dfrac{u}{v}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -8$, $w = 2u - v$

Exercice 28 : démontrer des conjectures avec des suites rationnelles.

u et v sont les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n+1}{n^2+2}.$$

Certaines de leurs valeurs sont tabulées sur l'écran de calculatrice ci-dessous.

n	u(n)	v(n)
0	.5	.5
10	.91667	.10784
20	.95455	.05224
30	.96875	.03437
40	.97619	.02559
50	.98077	.02038
60	.98387	.01694

n=60

a) Conjecturer la limite de chacune des suites u et v.

b) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n,

$$u_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}.$$

c) Démontrer les conjectures émises au **a)**.

Exercice 29 : algorithme et variable de sortie.

Algo Voici un algorithme :

Variables :	p, n sont des nombres entiers naturels
Entrée :	Saisir p ($p \geqslant 1$)
Traitement :	Affecter à n la valeur 1
	Tant que $\dfrac{1}{n^3} > 10^{-p}$
		Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a) Expliquer son rôle.

b) Quelle est la valeur de la variable n affichée en sortie lorsqu'on saisit en entrée :

- $p = 2$?
- $p = 4$?
- $p = 6$?

c) Expliquer pourquoi l'algorithme s'arrête pour toute valeur de p ($p \geqslant 1$) saisie en entrée ?

Exercice 30 : dEémontrer que la suite v est croissante.

v est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 + 2n$.

a) Démontrer que la suite v est croissante.

b) A est un nombre réel positif.

À partir de quel rang n a-t-on $v_n > A$?

c) Déterminer la limite de la suite v.

Exercice 31 : conjecture avec le calcul formel.

w est la suite définie, pour tout nombre entier naturel non nul n, par $w_n = \sqrt{n^2 - 1}$.

a) Conjecturer la limite de la suite w.

b) Voici un écran de calcul formel :

1	f(x):=sqrt(x^2-1) → $f(x) := \sqrt{x^2 - 1}$
2	Résoudre[f(x)>A] → $\left\{-\sqrt{A^2+1} > x, x > \sqrt{A^2+1}\right\}$

Valider la conjecture de la question **a)** à l'aide des résultats de cet écran.

Exercice 32 : suite récurrente et conjecture de la limite.

u est la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$.

1. a) Afficher une représentation graphique des premiers termes de la suite u avec la calculatrice.

b) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

2. a) Démontrer cette conjecture.

b) En déduire la limite de la suite u.

Exercice 33 : définir une suite par un algorithme.

Définir une suite par un algorithme

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème Voici un algorithme :

Variables :	k, n sont des nombres entiers naturels
	u est un nombre réel
Entrée :	Saisir n ($n \geqslant 2$)
Traitement :	Affecter à u la valeur 1
	Pour k allant de 2 à n
	| Affecter à u la valeur $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\times u$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

Déterminer la limite de la suite u définie par cet algorithme.