Exercices sur limites de fonctions .

Exercice 1 : limite de fonctions et racines carrées.

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

3) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

Exercice 2 : calculer ces limites.

Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^3 + 5\right)$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\sqrt{x} + 2\right)$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2\right)$

4) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2}{(x+1)^2}$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 (1 - x)$

6) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{x}{2 - x}$

7) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(1 + \sqrt{-x}\right)$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 3 : déterminer la limite en l'infini.

Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

1) $f(x) = x^{2016}$

2) $f(x) = x^{2017}$

3) $f(x) = x^2 + 3x - 5$

4) $f(x) = x^3 - 2x$

5) $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$

6) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$

7) $f(x) = x(1 - x)$

8) $f(x) = x(x+1)(x+2)$

9) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

10) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

11) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 2}$

12) $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2}{2x^2 + 4}$

Exercice 4 : limite de f à gauche.

Étudier la limite de f en 1 à gauche et à droite.

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

2) $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+6x-7}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor}$

Exercice 5 : justifier que ces implications sont fausses.

Soit f et g deux fonctions. Justifier par un contre-exemple que les implications suivantes sont fausses.

1) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$

2) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

3) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f(x)g(x) = 0.$

Exercice 6 : implications vraies ou fausses ?.

Soit un réel $x > 0$. Est-il vrai ou faux que :

1) $f(x) \geqslant x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$?

2) $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$?

3) $1 \leqslant f(x) \leqslant x + 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$?

Exercice 7 : déduire l'équation d'une asymptote.

On donne une limite d'une fonction f. En déduire l'équation d'une éventuelle asymptote au graphe de f.

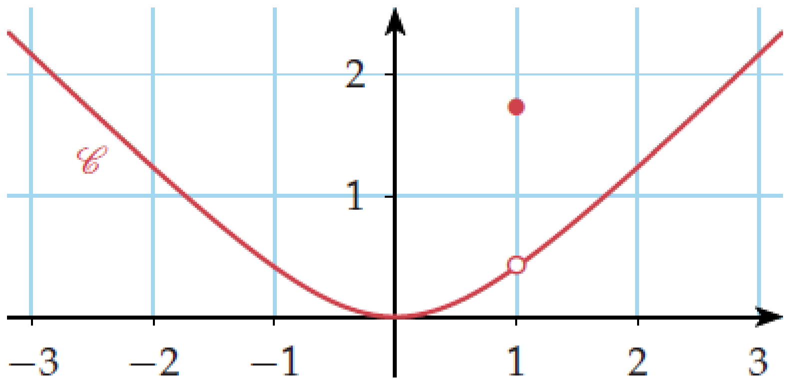
1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 10^{99}$
3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
5) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$
6) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -10^{99}$

Exercice 8 : limites de f en 1 à droite et à gauche.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

de graphe $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous où • indique un point qui est sur $\mathscr{C}$ et ○ un point qui n'est pas sur $\mathscr{C}$.



1) Justifier que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
2) Donner les valeurs de $f(1)$ et des limites de f en 1 à gauche et à droite.
3) Que doit valoir α pour que f soit continue ?

Exercice 9 : fonction cube et calculs de limites.

Soit $f : x \mapsto x^3$ la fonction cube.

1) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Justifier l'unique solution des équations suivantes :
   a) $f(x) = 4$ sur $[1,5 ; 1,6]$ b) $f(x) = -3$ sur $\mathbb{R}$

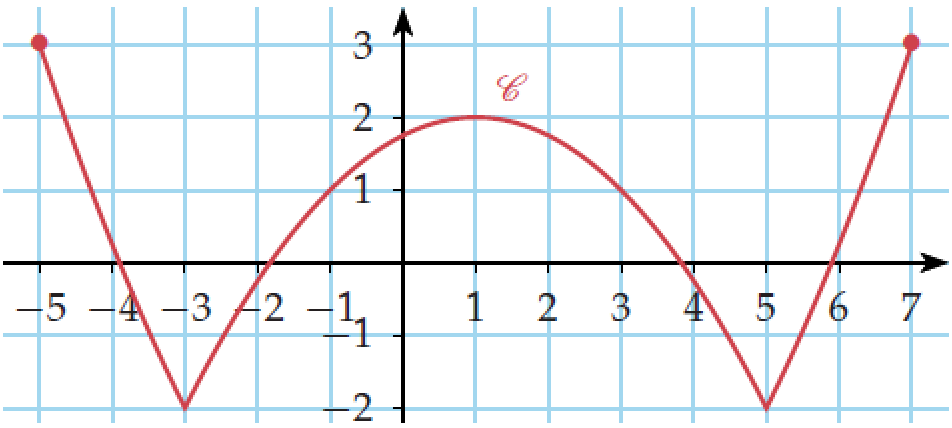
Exercice 10 : fonction valeur absolue.

Soit $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ la fonction partie entière.

1) Représenter graphiquement cette fonction.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
   a) $\lfloor x \rfloor = \dfrac{1}{2}$ b) $\lfloor x \rfloor = 1$

Exercice 11 : fonction numérique et courbe.

Soit une fonction f définie sur $I = [-5 ; 7]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.



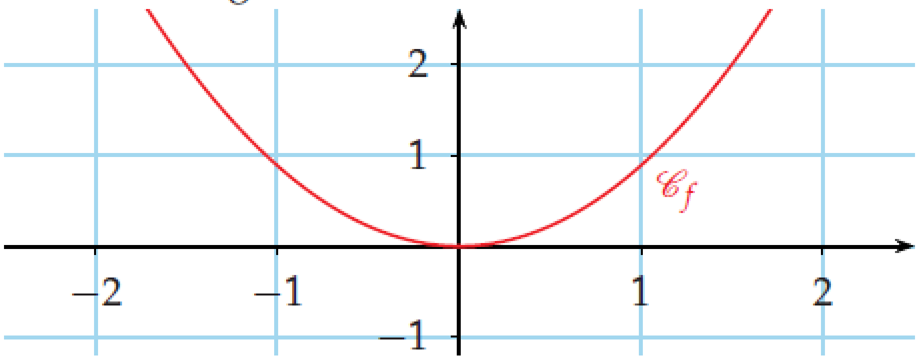
1) Justifier que f est continue sur I.
2) Établir le tableau de variation de f sur I.
3) Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 0$:
   a) dans $[1 ; 5]$ b) dans $[-1 ; 1]$ c) dans I

Exercice 12 : limite en + et - l'infini.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{x^2}{9}\right).$$

1) Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ à partir de la représentation graphique ci-dessous obtenue à l'aide d'un logiciel.



2) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) Expliquer pourquoi la conjecture était erronée.

Exercice 13 : logiciel de géométrie dynamique et valeur exacte d'une limite.

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + x + 7}}$$

représentée par $\mathscr{C}$ dans un repère.

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction g.

2) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

   a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

   b) Conjecturer une valeur approchée de la limite en $+\infty$ de la fonction g.

3) Déterminer par calcul la valeur exacte de la limite de g en $+\infty$.

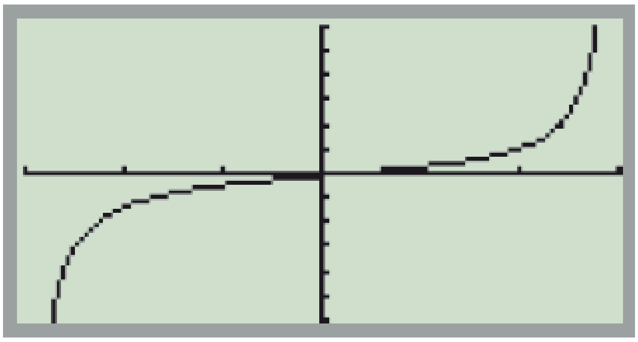
Exercice 14 : fonction rationnelle et limite.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}$ par :

$$f(x) = \frac{1-3x}{x^2-9}.$$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

a) Sur une calculatrice, on a tracé le graphe de f ce qui a donné l'écran suivant :



b) Expliquer pourquoi il semble apparaître une contradiction.

Exercice 15 : fonction rationnelle et limite.

Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{5x-8}{2x+1}.$$

Avec une calculatrice, on a établi le tableau suivant :

n	3	4	5	6
$h(10^n)$	2,494 753	2,499 475	2,499 948	2,499 995

1) Conjecturer la limite de f en $+\infty$ puis, la justifier.
2) Interpréter graphiquement cette limite.

Exercice 16 : en déduire la limite de la fonction g en l'infini.

g est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}+1$.

a) Démontrer que, pour tout nombre réel $\alpha>0$, l'intervalle $]1-\alpha\,;1+\alpha[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ pour x assez grand.

b) En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

c) Interpréter graphiquement cette limite.

Exercice 17 : interpréter graphiquement une limite.

h est la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{1}{x^2-1}.$$

a) Démontrer que, pour tout nombre réel $\alpha>0$, l'intervalle $]-\alpha\,;\alpha[$ contient toutes les valeurs $h(x)$ pour x assez grand.

b) En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c) Interpréter graphiquement cette limite.

Exercice 18 : démontrer que l'intervalle contient toutes les valeurs de f(x).

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}+2.$$

a) Démontrer que $f(x)>100$ pour x assez grand.

b) Démontrer que, pour tout nombre réel A supérieur à 2, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

c) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Exercice 19 : que peut-on en déduire pour la fonction f?.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 1.$$

a) Démontrer que, pour tout nombre réel A supérieur à -1, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

b) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

c) Pour quelles valeurs de $x > 0$ a-t-on :

- $f(x) > 1000$?
- $f(x) > 10^{10}$?

Exercice 20 : déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition $\mathcal{D}$.

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6$ $\quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ $\quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$

3) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$ $\quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{1-2x}{(x-2)^2}$ $\quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$

Exercice 21 : limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-5x+3}{x-2}.$$

1) Exprimer $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x-2}$.

2) Donner les limites aux bornes de $\mathcal{D}$.

3) Dresser le tableau de variation f.

Exercice 22 : fonction rationnelle et limite en un point.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 6}{x - 2}.$$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 2}(x-2)$ et $\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - x - 6)$.
En déduire que la limite de f en 2 est indéterminée.

2) Avec la calculatrice, faire un tableau de valeurs de $f(x)$ pour conjecturer la limite de f en 2.

3) Donner le développement de $(x-2)(x^2+2x+3)$.
S'en servir pour déterminer la limite de f en 2.

Exercice 23 : calculer plusieurs limites en l'infini.

Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

2) $f(x) = -4x^2 + 6x - 7$

3) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

4) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^3 + x - 3}$

5) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1} - x$

6) $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$

7) $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 1}$

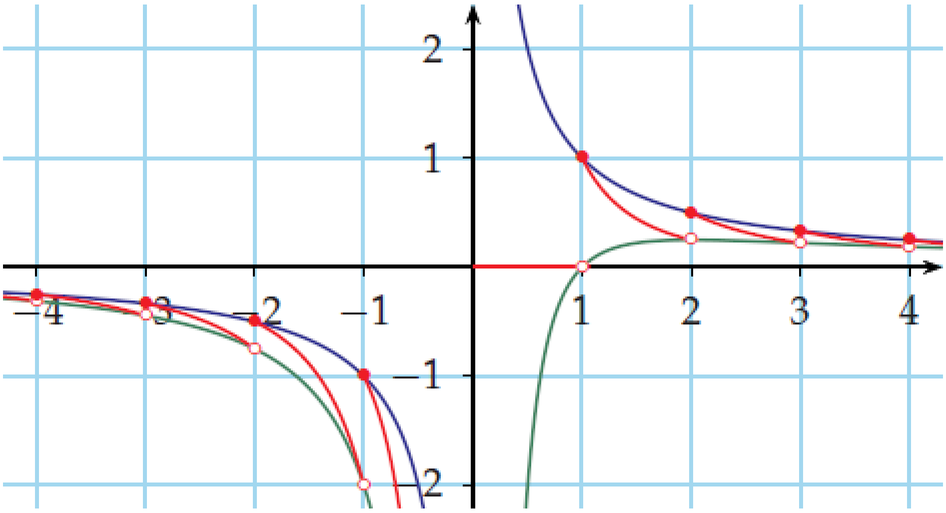
8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x}$

Exercice 24 : démontrer puis déduire la limite.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2}$$

représentée dans le repère ci-dessous avec deux autres courbes d'équations $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = \dfrac{x-1}{x^2}$.



1) Démontrer que, pour tout réel $x \neq 0$;

$$\frac{x-1}{x^2} < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

2) En déduire la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 25 : déterminer l'équation d'une asymptote.

Déduire de chaque limite l'équation d'une éventuelle asymptote au graphe de la fonction f.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$
2) $\lim\limits_{x \to +3} f(x) = -\infty$
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$
5) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
6) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$
7) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10^{100}$
8) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

Exercice 26 : asymptotes à la courbe représentative.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x}.$$

1) Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Donner les limites de f à droite et à gauche en 0.
3) Déduire de 1 et 2 les asymptotes à la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

Exercice 27 : déduire les équations des asymtotes.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,3\}$ par :

$$f(x) = \frac{-4x^2 + 1}{x^2 - 9}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2) En déduire les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.
3) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

Exercice 28 : déterminer les limites de la fonction aux bornes de son domaine de définition.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x - 1}{x^3 - 1}.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

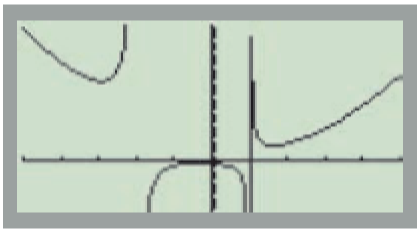
1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

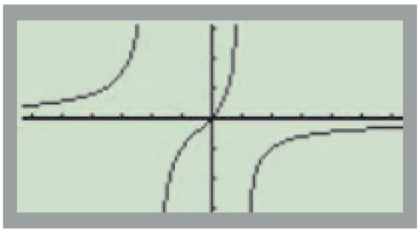
2) En déduire les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.

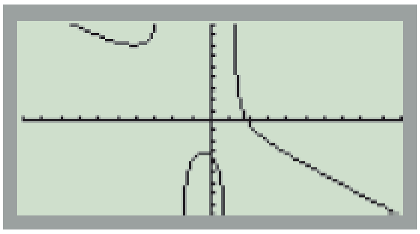
Exercice 29 : capture d'écran et calculatrice.

Chacune des quatre captures d'écran représente une des quatre fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,1\}$.
Sans utiliser la calculatrice ou un logiciel, associer chaque capture d'écran à sa fonction.

- $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 2}$
- $f : x \mapsto \dfrac{7 - x^3}{x^2 + x - 2}$
- $f : x \mapsto -\dfrac{2x}{x^2 + x - 2}$
- $f : x \mapsto \dfrac{x^4 + 2}{x^2 + x - 2}$

a


c


b


d