Exercice de maths en terminale

Exercices sur logarithme népérien .

Exercice 1 : simplification de logarithmes.

Simplifier les écritures suivantes :

1) $e^{\ln 3}$
2) $e^{-\ln 5}$
3) $e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
4) $\ln(e^5)$
5) $\ln 1 + \ln e$
6) $\ln(e^{-2})$

Exercice 2 : exprimer ces nombres sous la forme ln c.

Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1) $A = \ln 7 + \ln 8$
2) $B = \ln 20 - \ln 4$
3) $C = -\ln 4 + \ln 28$
4) $D = 3\ln 2$
5) $E = -2\ln 4$

Exercice 3 : comparer les réels A et B.

Dans chacun des cas, comparer les réels A et B.

1) $A = \ln 2 + \ln 5$ et $B = \ln 9$
2) $A = \ln 4$ et $B = \ln 6 - \ln 2$
3) $A = 3\ln 2$ et $B = 2\ln 3$
4) $A = \ln 25$ et $B = 2\ln 5$

Exercice 4 : résoudre les équations suivantes.

Résoudre les équations suivantes.

1) $e^x = 2$

2) $e^x = -5$

3) $e^x = \frac{1}{4}$

Exercice 5 : résoudre les équations.

Résoudre les équations suivantes.

1) $\ln x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

2) $\ln x = \frac{\ln 5}{2}$

3) $\ln x = -\ln 9$

Exercice 6 : logarithmes népériens et équations.

Résoudre les équations suivantes.

1) $(\ln x - 2)(1 + \ln x) = 0$

2) $(e^x - 3)(e^x + 5) = 0$

3) $(\ln x)(6 - 3\ln x) = 0$

Exercice 7 : résoudre les inéquations suivantes..

Résoudre les inéquations suivantes.

1) $\ln(x) \geqslant 1$

2) $\ln(x) > -2$

3) $\ln(x) \leqslant \frac{1}{2}$

4) $\ln(x) < 3$

Exercice 8 : fonction logarithme : image et antécédent.

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \ln x$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier)

1) 0 a un seul antécédent par f.
2) L'image de 1 par f est e.
3) L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
4) L'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
5) Il n'existe aucun réel x tel que $\ln x > 100$.

Exercice 9 : etude d'une fonction logarithme et utilisation de la calculatrice.

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \ln x$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en en 1.
2) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la position relative de $\mathscr{C}$ et T.
3) Pour tout réel $x > 0$, on pose $d(x) = \ln x - x + 1$.
   a) Dresser le tableau de variation de la fonction d.
   b) En déduire le signe de $d(x)$ en fonction de x.
   c) Démontrer la conjecture établie au 2.

Exercice 10 : exprimer les nombres logarithmes sous forme d'entier.

Calculer les nombres réels suivants.

1) $\ln(0,5)+\ln 2$

2) $3\ln 2-\ln 4$

3) $(\ln(e^3))^2$

4) $e^{\ln 2+\ln 3}$

Exprimer les nombres suivants sous forme d'un entier ou d'un inverse entier.

1) $A=e^{2\ln 3}$

2) $B=e^{4\ln 2}$

3) $C=e^{-\ln 4}$

4) $D=e^{-5\ln 2}$

Exercice 11 : simplifier des expressions contenant des logarithmes.

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1) $A=e^{\ln 6-2\ln 3}$

2) $B=e^{3\ln 2-\ln 4+1}$

3) $C=\dfrac{e^{\ln 5-1}}{e^{2+\ln 5}}$

4) $D=\dfrac{e^{2\ln 3-\ln 2}}{e^{-3\ln 2}}$

Exercice 12 : exprimer les nombres sous forme ln c.

Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1) $A=2\ln 5+\ln 3$

2) $B=3\ln 3-2\ln 2$

3) $C=-\ln 5+3\ln 2$

4) $D=3\ln 4-3\ln 2$

Exercice 13 : exprimer les nombres avec ln 2 et ln 6.

Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

1) $\ln 8$

2) $\ln(\sqrt{2})$

3) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

4) $3\ln 2 - \ln 16$

Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$.

1) $\ln\left(\frac{1}{9}\right)$

2) $\ln 24 - \ln 8$

3) $\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 4$

4) $2\ln 3 - \ln 27$

5) $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$

Exercice 14 : expression et logarithmes.

Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

1) $\ln 20$

2) $\ln 100$

3) $\ln\left(\frac{4}{25}\right)$

4) $\ln\sqrt{10}$

Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$ et $\ln 7$.

1) $\ln\left(\frac{81}{7}\right)$

2) $\ln 441$

3) $\ln\left(\frac{49}{27}\right)$

4) $\ln\sqrt{21}$

Exercice 15 : en déduire des encadrements de logarithmes.

On donne les encadrements suivants :

$$0,69 < \ln 2 < 0,70 \text{ et } 1,60 < \ln 5 < 1,61.$$

En déduire, sans calculatrice, les encadrements des nombres suivants.

1) $\ln 4$

2) $\ln \left(2^5\right)$

3) $\ln \frac{5}{2}$

4) $\ln \frac{16}{25}$

Exercice 16 : résoudre des équations.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln x = 2$;
2) $\ln x = -1$;
3) $3 \ln x - 9 = 0$.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(x+5) = \ln 3$;
2) $\ln(x^2) = \ln 9$;
3) $\ln(x^2 + x) = \ln 6$.

Résoudre les équations suivantes :

1) $2 + 3 \ln x = 14$;
2) $\ln(x^2) = \ln 9$;
3) $e^{2-3x} = 5$;
4) $2e^{2x} - 10 = 0$.

Exercice 17 : résoudre les équations suivantes.

Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(2-x) + 1 = 0$;
2) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 5$;
3) $\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2$.

Exercice 18 : l'expression donnée a-t-elle un sens?.

Dans chacun des cas, pour quelles valeurs de x, l'expression donnée a-t-elle un sens ?

1) $\ln x$

2) $\ln(3-x)$

3) $\ln(x+2)$

4) $\dfrac{1}{\ln(x^2)}$

Exercice 19 : résoudre l'équation ou l'inéquation.

1. Dans chaque cas, résoudre l'équation ou l'inéquation.

a) $\ln x = 5$ **b)** $e^x = 7$

c) $\ln(6x+1) > 2$ **d)** $e^{3x} \leqslant 4$

2. Résoudre l'inéquation $\ln(3x) < \ln(2-5x)$.

Exercice 20 : logarithmes, équations et inéquations.

Résoudre chaque équation ou inéquation.

a) $\ln x = 0$ **b)** $\ln x \geqslant 1$ **c)** $\ln x = 3$

d) $\ln x < -5$ **e)** $\ln(2x-5) = -2$

Exercice 21 : inéquations à résoudre.

Résoudre chaque équation ou inéquation.

a) $e^x = 2$ **b)** $e^x > -1$ **c)** $e^x < \dfrac{1}{2}$

d) $e^{-x} \geqslant 5$ **e)** $e^{2x-3} < 4$ **f)** $e^{1-5x} \leqslant 1$

Exercice 22 : logarithmes et inéquations.

Résoudre chaque équation ou inéquation.

a) $\ln(2x-1) = \ln x$ **b)** $\ln(x+3) \geqslant \ln(3x+2)$

c) $\ln(x^2-2) > \ln(2x)$ **d)** $\ln(x-3) < \ln(2-3x)$

Exercice 23 : logiciel Xcas et logarithmes.

Voici une copie d'écran obtenue avec le logiciel Xcas :

```
1 resoudre(ln(2x+5)=ln(x-7))
  [-12]                                M
```

a) Que peut-on en penser ?

b) Résoudre à votre tour cette équation.

Exercice 24 : décharge de condensateur et tension initiale.

On étudie la décharge d'un condensateur. Sa tension V (en volts) en fonction du temps t (en ms) écoulé depuis le début de la décharge est donnée par la forme :

$$V = 5000e^{-8,3t}.$$

Au bout de combien de temps la tension initiale (à l'instant $t = 0$) sera-t-elle divisée par 2 ?

Exercice 25 : logarithmes et exponentielles.

1) Résoudre l'équation $X^2 - 2X - 15 = 0$.

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

   a) $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$;

   b) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$.

Exercice 26 : logarithme et inéquations.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(2-3x) \geqslant 0$;

2) $\ln(1-x) < 1$;

3) $\ln\left(\dfrac{3}{x}\right) > \ln 3$.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $2\ln(x) \geqslant \ln(2-x)$;

2) $\ln(x) + \ln(2x+5) \leqslant \ln 3$;

3) $\ln(4x) - \ln 2 < 2\ln 4$.

Exercice 27 : inéquations et exponentielles.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $e^x > 3$

2) $e^x \leqslant \dfrac{1}{2}$

3) $e^x < -e$

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $2e^x - 3 > 9$

2) $4e^x - 1 \geqslant e^x + 5$

3) $e^{2x} - 5e^x < 0$

Exercice 28 : logarithmes et résolution des inéquations.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(-2x+1) \leqslant 0$

2) $\ln\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right) \geqslant 0$

3) $\ln(2x-1) + 1 > 0$

Exercice 29 : théorème de comparaison et limites de logarithmes.

En utilisant un théorème de comparaison, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 105x + 18)$;

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(8 - x^3)$.

Exercice 30 : démontrer des propriétés avec limites de logarithmes.

1) Démontrer la propriété suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2) En déduire les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right)$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 31 : etude le signe de f'(x) et étudier les variations.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

1) Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) Pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.

3) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

4) En déduire que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$ que l'on précisera.

Exercice 32 : déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I.

Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.

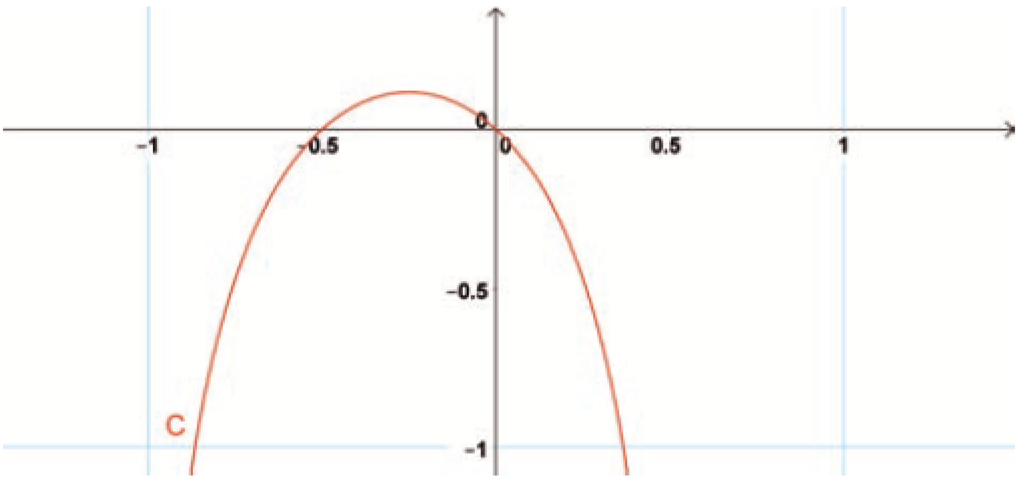
1) $f(x) = \dfrac{3 - 2\ln x}{x - 1}$ sur $I =]1\,;+\infty[$.
2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
3) $f(x) = (\ln x)^3$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
4) $f(x) = \sqrt{\ln x}$ sur $I =]1\,;+\infty[$.

Exercice 33 : tangente et courbe représentative.

Soit f la fonction définie sur $\left]-1\,;\dfrac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 - x + 1).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.



1) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
Vérifier graphiquement le résultat.
2) a) La courbe $\mathscr{C}$ semble-t-elle admettre une tangente horizontale ? Si oui, en quel point ?
b) Démontrer cette conjecture.

Exercice 34 : suite géométrique et logarithme népérien.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{2}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n et u_n en fonction de n.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = \ln(v_n)$.
   a) Montrer que la suite (w_n) est bien définie.
   b) Montrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de n.

Exercice 35 : logarithme décimal et népérien.

On rappelle que pour tout réel $x > 0$, $\log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

1) Pour tout entier relatif n, montrer que $\log(10^n) = n$.
2) Rappeler le sens de variation de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, et en déduire celui de la fonction log sur $]0\,;+\infty[$.
3) Soit a et b deux réels strictement positifs. En utilisant les propriétés algébriques de la fonction ln, démontrer :
   a) $\log(ab) = \log a + \log b$;
   b) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

Exercice 36 : déterminer l'équation de la tangente T.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (d'unité graphique 2 cm).

1) Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes.
2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
4) Déterminer une équation de la tangente T au point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
5) Construire $\mathscr{C}$ et T.

Exercice 37 : etudier la limite et l'asymptote verticale.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Étudier la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale.

2) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}.$$

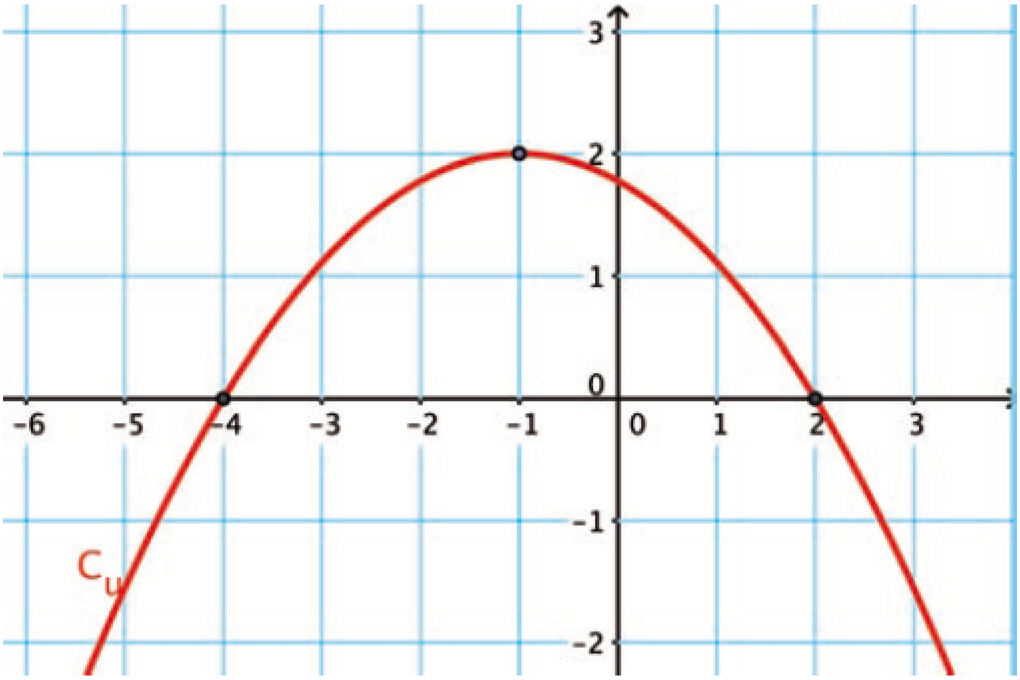
3) Dresser le tableau des variations de f.

4) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5) Construire $\mathscr{C}$ et son asymptote.

Exercice 38 : déterminer l'ensemble de définition et fonction composée.

On donne ci-dessous la courbe représentative C_u d'une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\ln(u)$.
2) Étudier les limites de la fonction $\ln(u)$ aux bornes de son ensemble de définition.
3) Étudier le sens de variation de la fonction $\ln(u)$.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction $\ln(u)$.

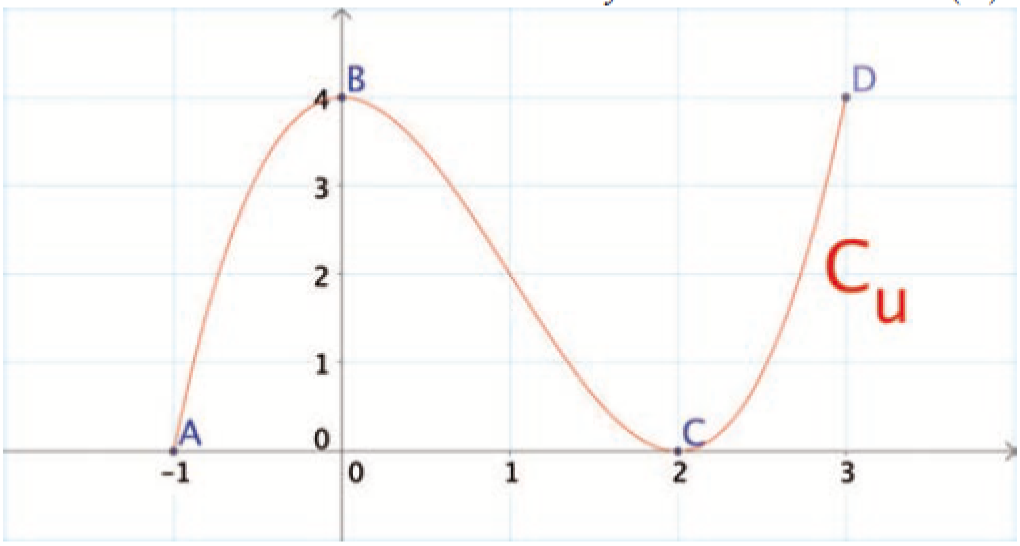
Exercice 39 : déterminer la dérivée de chaque fonction.

Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ sur $I =]0\,;1[$
2) $f(x) = (\ln x)^2(3 - \ln x)$ sur $I =]0\,;+\infty[$
3) $f(x) = (2 - \ln x)(1 - \ln x)$ sur $I =]0\,;+\infty[$
4) $f(x) = e^{5\ln x+2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$

Exercice 40 : représentation graphique et fonction composée.

Soit u une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_u$ est donnée ci-dessous. On note f la fonction $\ln(u)$.



1) Justifier que f est définie sur $]-1\,;2[$.

2) Étudier le sens de variation de la fonction f.

3) Étudier les limites de f en -1 et en 2.

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5) Discuter selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.