Exercices sur loi binomiale et intervalle de fluctuation .

Exercice 1 : pièce truquée et probabilité.

Une pièce truquée a une probabilité de $\frac{3}{4}$ de tomber sur face lorsqu'on la lance.
Sara envisage de jouer au jeu suivant : on lance la pièce, et on observe le résultat obtenu :

- si la pièce tombe sur pile, on gagne 8 €
- si la pièce tombe sur face, on perd 4 €

Doit-on conseiller à Sara de jouer à ce jeu ?

On lance quatre fois de suite une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile ?

Exercice 2 : une urne contenant des boules.

Une urne contient des boules rouges, des boules noires et des boules vertes. Elle contient deux fois plus de boules rouges que de boules noires, et trois fois plus de boules vertes que de boules rouges.
On tire au hasard une boule dans l'urne.
Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Simplifier les nombres suivants :

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$

3) $1000 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right)^8$

2) $14 \times \left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^3$

4) $45 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{6}{5}\right)^3$

Exercice 3 : jeu de dé cubique équilibré et expérience de Bernoulli.

Zehuan joue à un jeu avec un dé cubique équilibré. S'il obtient 5 ou plus au résultat du dé, il gagne 10€, sinon il perd 4€.

1) Pourquoi cette expérience aléatoire est-elle une expérience de Bernoulli ?

2) On note X son gain après une partie.
Déterminer l'espérance de X.

Exercice 4 : calculer des probabilités.

Voici la loi de probabilité de X.

x_i	-5	3	8
$P(X=x_i)$	p	$2p$	$3p$

Déterminer la valeur de p.

Voici la loi de probabilité de X.

x_i	-2	0	1	3	6
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

Calculer $P(X \leqslant 0)$, $P(X > 3)$, $P(X \geqslant 3)$ et $P(-2 < X \leqslant 3)$.

Voici la loi de probabilité de X.

x_i	-16	3	24
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$

Calculer $E(X)$.

Voici la loi de probabilité de X.

x_i	-4	8	a
$P(X=x_i)$	0,1	0,5	0,4

Déterminer la valeur de a sachant que $E(X) = 12$.

Exercice 5 : loi de probabilité d'une variable aléatoire.

On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-5	-1	3	7	a
$P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1

Déterminer la valeur de a sachant que $E(X) = 0$.

Exercice 6 : déterminer la valeur de p.

Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-3	2	7
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	p

Déterminer la valeur de p.

Exercice 7 : calculer des probabilités.

Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	0,35	0,25	0,2	0,2

Calculer $P(X \geqslant 1)$, $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$ et $P(X < 2)$.

Exercice 8 : déterminer l'espérance de la variable aléatoire.

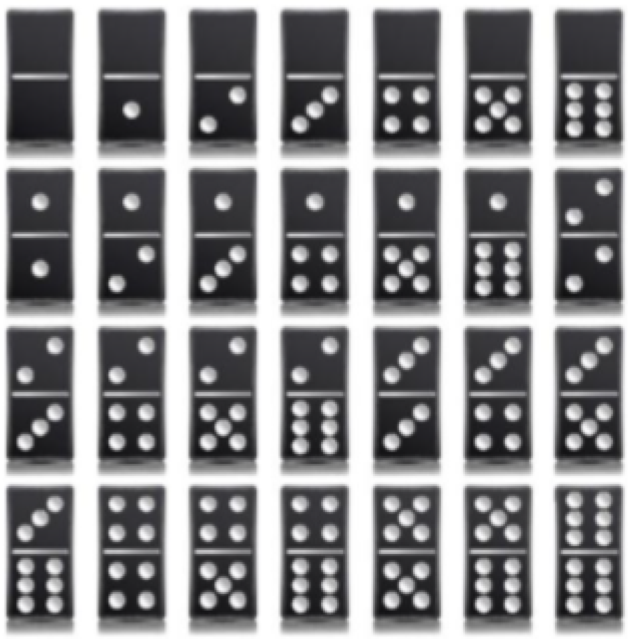
Le tableau ci-dessous donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y.

x_i	-12	4	9
$P(Y=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Exercice 9 : un jeu de dominos.

Voici la composition d'un jeu de domino.



On tire au hasard un domino.

Soit S la variable aléatoire qui donne la somme des points inscrits sur le domino.

Déterminer la loi de probabilité de S.

Exercice 10 : tirage d'un jeton dans une urne.

Une urne contient les jetons, indiscernables au toucher, représentés ci-dessous.

1. Soit X la variable aléatoire qui associe, au tirage d'un jeton dans l'urne, la valeur du nombre inscrit sur celui-ci.
Déterminer la loi de probabilité de X.

2. On suppose maintenant que les jetons verts comptent double, les jetons rouges comptent pour moitié et les jetons bleus sont sans effet.

Soit Y la variable aléatoire qui associe, au tirage d'un jeton dans l'urne, la valeur du nombre inscrit sur celui-ci en tenant compte des modifications.
Déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice 11 : un jeu de tarot de 78 cartes.

Un jeu de tarot comporte 78 cartes :

- 56 cartes « classiques » (14 de chaque couleur : roi - dame - cavalier - valet - 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - as) ;
- 21 atouts (numérotés de 1 à 21) ;
- un joker appelé « excuse ».

Lors du comptage des points à la fin d'une partie, les cartes n'ont pas la même valeur :

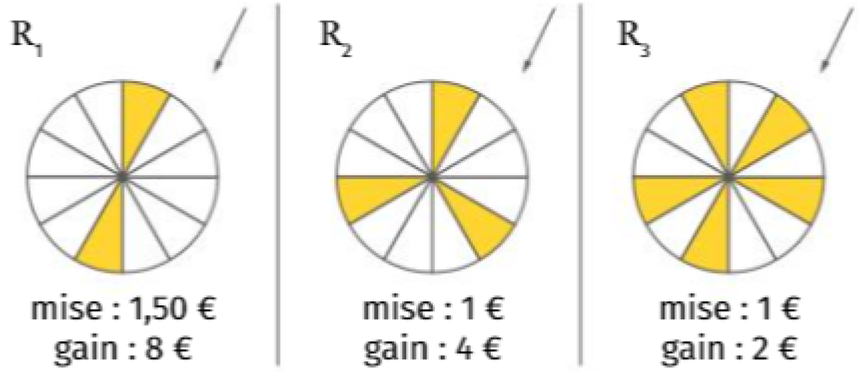
- un roi, l'atout 1, l'atout 21 et l'excuse rapportent 4,5 points ;
- une dame rapporte 3,5 points ;
- un cavalier rapporte 2,5 points ;
- un valet rapporte 1,5 point ;
- toutes les autres cartes rapportent 0,5 point.

Soit X la variable aléatoire qui au tirage d'une carte d'un jeu de tarot associe sa valeur en points. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 12 : un stand dans une kermesse.

Lors d'une kermesse, dans un stand, sont disposées trois roues. Chaque roue est divisée en douze secteurs de même aire. Une roue étant lancée, elle s'arrête aléatoirement face à la flèche sur un seul secteur. On admettra que tous les secteurs ont la même probabilité d'être « tirés ».

Pour participer, un joueur choisit l'une des trois roues, acquitte la mise correspondant à la roue choisie, puis lance cette roue. Si le secteur « tiré » est jaune, le joueur reçoit le gain correspondant à la roue choisie.



Soit X (respectivement Y et Z) la variable aléatoire donnant le gain du joueur qui lance la roue $R1$ (respectivement $R2$ et $R3$). Déterminer la loi de probabilité de X, Y et Z.

Exercice 13 : le jeu de scrabble.

Le jeu de Scrabble est composé de 102 jetons : 2 jokers qui rapportent 0 point et les 26 lettres de l'alphabet sont réparties de la façon suivante.

A_1	B_3	C_3	D_2	E_1	F_4	G_2	H_4	I_1	J_8	K_{10}	L_1	M_2
9	2	2	3	15	2	2	2	8	1	1	5	3

N_1	O_1	P_3	Q_8	R_1	S_1	T_1	U_1	V_4	W_{10}	X_{10}	Y_{10}	Z_{10}
6	6	2	1	6	6	6	6	2	1	1	1	1

Par exemple, 9 jetons portent la lettre A et rapportent 1 point, 2 jetons portent la lettre B et rapportent 3 points, 2 jetons portent la lettre C et rapportent 3 points, etc.

Soit X la variable aléatoire qui associe au tirage d'un jeton le nombre de points que celui-ci rapporte. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 14 : le jeu Uno et probabilités.

Le jeu de Uno est composé de 108 cartes réparties de la façon suivante :

- 76 cartes numérotées de 0 à 9 (19 de chacune des quatre couleurs, neuf paires de même valeur et un seul 0) ;
- 32 cartes spéciales (huit cartes « inversion », huit cartes « passe ton tour », huit cartes « +2 », quatre cartes « +4 » et quatre cartes « joker »).

Dans le comptage des points, les cartes numérotées rapportent autant de points que le nombre qu'elles représentent, les cartes « inversion », « passe ton tour » et « +2 » rapportent 20 points et les cartes « +4 » et « joker » rapportent 50 points.

Soit Y la variable aléatoire qui au tirage d'une carte du jeu de Uno associe sa valeur en points. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice 15 : une biscuiterie de cookies.

Une biscuiterie fabrique des cookies qu'elle conditionne en sachets. Les cookies peuvent être aux pépites de chocolat au lait, de chocolat noir ou de chocolat blanc et peuvent contenir ou non des éclats de noisettes.

Pour déterminer le prix P d'un sachet de cookies, la biscuiterie utilise l'algorithme suivant.

```
P ← 2,5
Si les cookies sont aux pépites de chocolat noir :
    P ← P + 1
Sinon :
    Si les cookies sont aux pépites de chocolat blanc :
        P ← P + 0,5
    Fin Si
Fin Si
Si les cookies ont des éclats de noisettes :
    P ← P + 0,5
Fin si
```

1. Déterminer le prix à payer pour un sachet de différentes variétés de cookies.

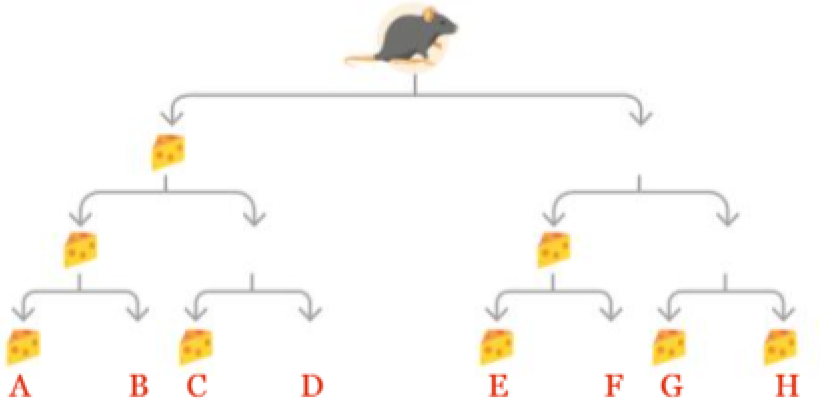
2. Les six types de cookies ont exactement la même probabilité d'être produits.

On appelle X la variable aléatoire qui associe à un sachet de cookies son prix de vente.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 16 : une souris dans un labyrinthe.

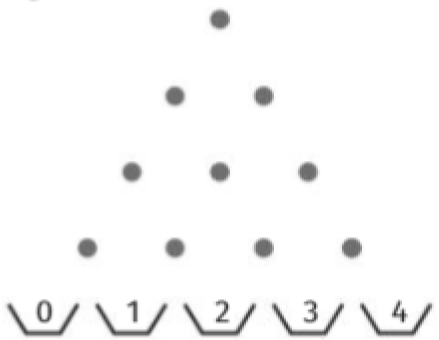
On étudie le comportement d'une souris dans le labyrinthe ci-dessous.



À chaque intersection, la souris choisit au hasard et de manière équiprobable une direction. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fromages que la souris a mangés en traversant le labyrinthe.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 17 : la planche à clous de Galton.

La planche de Galton. Un joueur lâche une bille sur une planche inclinée sur laquelle sont plantés des clous comme sur la figure ci-dessous.



À chaque clou rencontré, la bille passe indifféremment à droite ou à gauche. En fin de parcours, elle tombe dans l'une des cases numérotées de 0 à 4. Le numéro de la case est donc le nombre de fois où la bille est descendue à droite lors de son parcours.

1. Traduire cette situation par un arbre de probabilité.

2. Soit X la variable aléatoire qui au lancer d'une bille associe le numéro de la case dans laquelle elle termine son parcours. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 18 : un dé icosaédrique et probabilités.

On lance un dé icosaédrique, dont les faces sont numérotées de 1 à 20, que l'on suppose bien équilibré.

On marque :

- 2 points si le nombre obtenu est pair ;
- 3 points si le nombre obtenu est premier ;
- 5 points si le nombre obtenu est un multiple de 5 ;
- 7 points si le nombre obtenu est un carré parfait.

Les points sont cumulables.

Soit X la variable aléatoire qui associe au lancer du dé le nombre de points marqués par le joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. En déduire $P(X \leqslant 5)$, $P(3 \leqslant X \leqslant 7)$ et $P(X > 7)$.

Exercice 19 : calculer a et l'espérance.

On donne dans le tableau ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

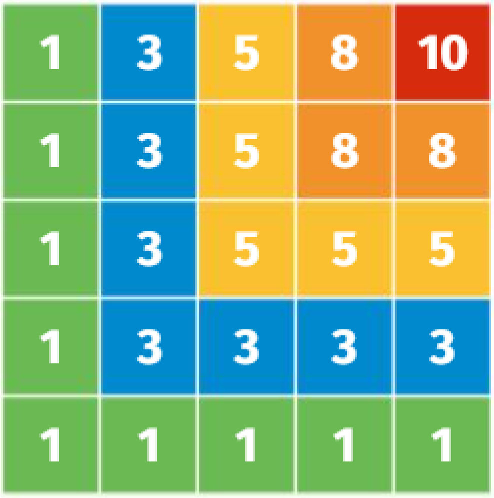
x_i	-2	a	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	p

1. Déterminer la valeur de p.

2. Quelle valeur faut-il donner à a pour que $E(X) = 2$?

Exercice 20 : un jeu de tir dans une cible.

Un jeu consiste à tirer dans la cible ci-dessous.
La probabilité d'atteindre une zone de couleur est proportionnelle à sa surface. On suppose que le participant ne rate jamais la cible.



1. Quelles sont les probabilités d'atteindre chacune des cinq zones colorées ?

2. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par le participant.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 21 : cible et zones de colorées.

Un jeu consiste à tirer dans la cible ci-dessous.

- La zone rouge est un cercle de rayon 10 cm.
- La zone orange est une couronne dont le grand rayon est 30 cm.
- La zone jaune est une couronne dont le grand rayon est 50 cm.
- La zone bleue est une couronne dont le grand rayon est 70 cm.

La probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à sa surface.

On suppose que le participant ne rate jamais la cible.

1. Calculer la surface totale de la cible puis les probabilités d'atteindre les différentes zones ?

2. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par le participant.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 22 : un Rubik's cube et probabilités.

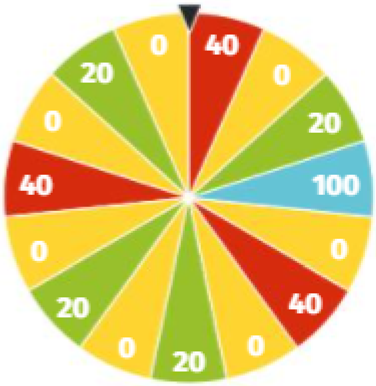
Un Rubik's cube est constitué de 27 petits cubes sur lesquels sont collées des étiquettes de couleur. On détache les petits cubes, indiscernables au toucher, et on les place dans une urne. On en tire un au hasard.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de faces colorées sur le petit cube.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 23 : faites tourner la roue !.

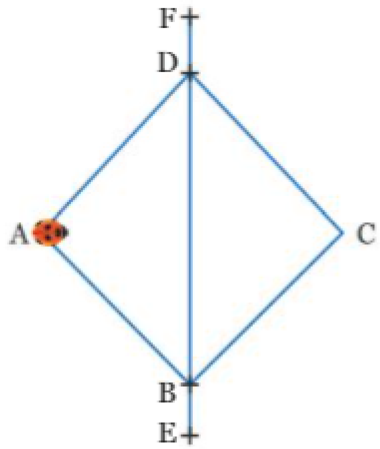
Un jeu consiste à faire tourner la roue ci-contre après avoir payé une mise. Les nombres inscrits dans les différents secteurs correspondent au gain (en euro) remporté par le joueur avant déduction de la mise payée.



Quelle doit être la mise payée par le joueur pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 24 : déplacement d'une coccinelle et probabilités.

Une coccinelle se déplace en partant du point A sur la figure ci-contre.
À chaque intersection, la coccinelle choisit au hasard une direction (elle peut revenir sur ses pas). On s'intéresse aux trajets composés de trois déplacements.



1. Traduire la situation par un arbre de probabilité.

2. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de points différents visités par la coccinelle (y compris le point A).

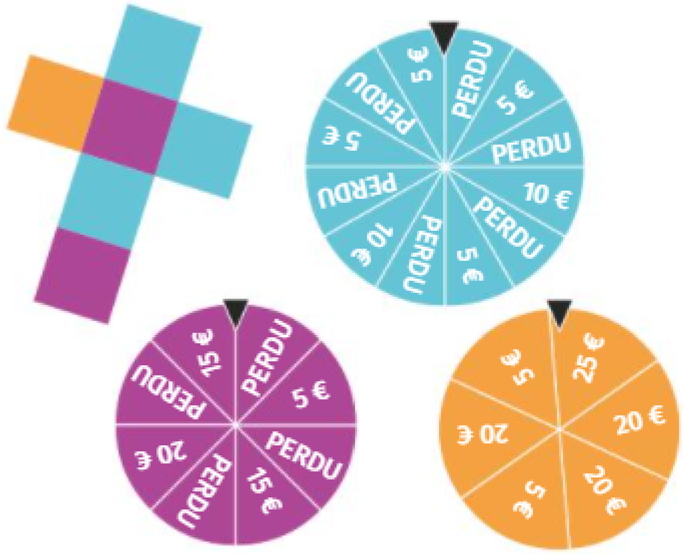
a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

3. Simuler la variable aléatoire X à l'aide d'un programme Python.

Exercice 25 : une fête foraine.

Dans une fête foraine, après avoir payé 5 €, le joueur lance un dé à six faces colorées dont le patron est donné ci-dessous.



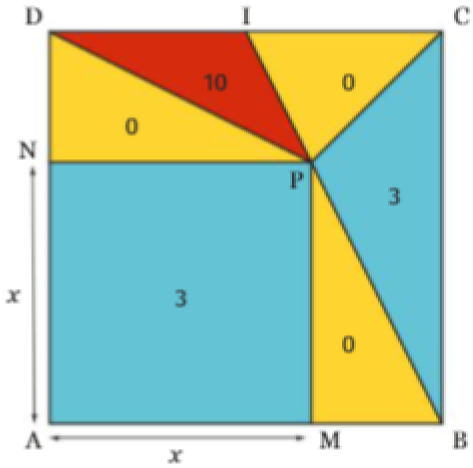
Il lance ensuite la roue correspondant à la couleur de la face obtenue.
Le secteur obtenu en lançant la roue correspond au montant d'argent qu'il reçoit.
Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 26 : forage et tunnel.

On souhaite percer un nouveau tunnel de cinq kilomètres de long. Le premier jour, 300 mètres sont creusés. Chaque jour, la longueur de forage diminue de 5 mètres. Au bout de combien de jours le tunnel sera-t-il percé ?

Exercice 27 : cible et polygones de même surface.

Un jeu consiste à tirer dans la cible ci-dessous :



ABCD est un carré de côté 6 et I est le milieu de $[\mathrm{CD}]$. M est un point mobile sur le segment $[\mathrm{AB}]$ et N et P sont tels que AMNP est un carré.

La probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à sa surface. Une zone est composée de tous les polygones de même couleur. On suppose que le participant ne rate jamais la cible.

1. a. Exprimer en fonction de x les probabilités d'atteindre les différentes zones.

b. Quelle valeur faut-il donner à x pour que la probabilité d'atteindre la zone jaune soit maximale ?

2. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par le participant.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Exprimer $\mathrm{E(X)}$ en fonction de x.

c. Peut-on avoir $\mathrm{E(X)} = 0$. Justifier.