Exercices sur lois normales .

Exercice 1 : production de vis et loi normale.

Une machine produit des vis de longueur 35 mm. La longueur réelle de la vis peut varier.
On note L la variable aléatoire qui donne l'écart en millimètres, $35-\ell$ où ℓ est la longueur réelle de la vis.
On admet que L suit la loi normale centrée réduite.
Donner l'arrondi à 10^{-4} de :
a) $P(-0,1 \leqslant L \leqslant 0,1)$; **b)** $P(L \leqslant 0,05)$; **c)** $P(L \geqslant 0,2)$.

Exercice 2 : course à pied et événement.

Lors d'une course à pied, le temps moyen mis par les participants a été de 3 h.
On note T la variable aléatoire qui donne l'écart, en heures, $t-3$ où t est le temps mis par un participant.
On admet que T suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

1. Que représente l'événement $P(T \geqslant 0,25)$?

2. Calculer et donner l'arrondi au centième de :
a) $P(T \geqslant 0,25)$; **b)** $P(T \leqslant -0,5)$; **c)** $P(-0,1 \leqslant T \leqslant 0,2)$.

Exercice 3 : déterminer la probabilité qu'il soit à découvert.

Sigmund a vraiment du mal à gérer son argent ! La somme qu'il a sur son compte en banque (en milliers d'euros) est donnée par une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

On donnera les résultats arrondis à 10^{-4} près.

1) Déterminer la probabilité que le compte de Sigmund soit à découvert.

2) Déterminer la probabilité que Sigmund :

   a) ait entre 200 et 500 euros sur son compte ;

   b) soit à découvert d'entre 100 et 600 euros.

3) S'il est à découvert, Sigmund reçoit un SMS de sa banque.

   Déterminer la probabilité qu'il soit à découvert de plus de 500 euros sachant qu'il a reçu un SMS.

Exercice 4 : loi normale et calculs de probabilités.

Dans l'exercice, on arrondira les résultats au millième.

1) On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(2\,;\,3^2)$. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(0 \leqslant X \leqslant 3)$

b) $P(X < 2)$

c) $P(4 \geqslant X)$

d) $P(X < 1)$

e) $P(X \geqslant 3)$

f) $P(X > -2)$

g) $P_{(1<X<3)}(X \geqslant 2)$

h) $P_{(X \geqslant 2)}(X > 3)$

> Pour calculer $P(X \leqslant a)$ ou $P(a \leqslant X)$, on peut calculer respectivement $P\left(-10^{99} \leqslant X \leqslant a\right)$ ou $P\left(a \leqslant X \leqslant 10^{99}\right)$ avec une calculatrice.

2) On considère une variable aléatoire Y suivant la loi normale de paramètres $\mu = 10$ et $\sigma = 4$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du réel t telle que :

a) $P(Y < t) = 0{,}2$

b) $P(Y \geqslant t) = 0{,}7$

c) $P(-t < Y - 10 < t) = 0{,}9$

d) $P(t \leqslant Y \leqslant 10) = 0{,}35$

e) $P(t \leqslant Y < 9) = 0{,}1$

Exercice 5 : une variable aléatoire Z suivant une loi normale.

On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale $\mathcal{N}(8\,;\,4)$.

Dans l'exercice, on arrondira les résultats au dix-millième.

1) Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(6 \leqslant Z \leqslant 12)$

b) $P(Z > 9)$

c) $P(Z \leqslant 7{,}5)$

d) $P_{Z \geqslant 8}(Z < 10)$

2) Déterminer dans chacun des cas suivants la valeur du réel t telle que :

a) $P(Z \leqslant t) = 0{,}3$

b) $P(Z \geqslant 2t) = 0{,}4$

Exercice 6 : déterminer les probabilités P(X>2) et la loi sans vieillissement.

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(5 ; 1{,}3^2)$.

1) Déterminer les probabilités $P(X > 2)$ et $P_{(X>1)}(X > 3)$ arrondies à 10^{-3} près.
2) La loi de X est-elle sans vieillissement ?

Exercice 7 : une variable aléatoire et une loi normale.

On considère une variable aléatoire Y suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ et a est un réel positif tel que $P(Y < \mu + a) = 0{,}8$. Déterminer :

1) $P(\mu \leqslant Y \leqslant \mu + a)$
2) $P(Y > \mu + a)$
3) $P(Y \leqslant \mu - a)$
4) $P(\mu - a \leqslant Y \leqslant \mu + a)$

Exercice 8 : calcul de l'écart-type et variable aléatoire.

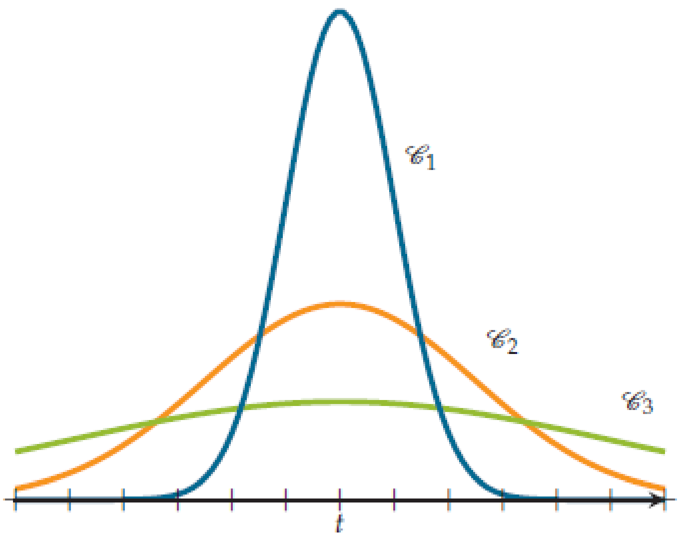
On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ et le tableau ci-dessous :

x	-1	0	1	2	3
$P(X \leqslant x)$	0,006 2	0,030 4	0,105 6	0,266	0,5

1) Déterminer les probabilités suivantes :
   a) $P(0 < X \leqslant 2)$
   b) $P(X \geqslant 1)$
   c) $P((X < -1) \cup (X > 0))$
2) Déterminer μ.
3) En déduire σ sachant que $10\sigma \in \mathbb{N}$ et $1 < \sigma < 2$.

Exercice 9 : courbes de fonctions de densité.

On considère les courbes ci-dessous représentant les fonctions de densité de trois variables aléatoires X, Y et Z suivant les lois respectives $\mathcal{N}\left(6\,;\,2{,}5^2\right)$, $\mathcal{N}\left(6\,;\,5^2\right)$ et $\mathcal{N}\left(6\,;\,1^2\right)$.



1) Graphiquement, quelle est la valeur de t ?
2) Associer chacune des courbes à la variable aléatoire lui correspondant.

Exercice 10 : moyen de transport entre le vélo et le bus.

Pour se rendre à son travail, Hiluphekile a le choix entre prendre son vélo ou prendre un bus.
On suppose que le temps de trajet à vélo (en minutes) suit la loi normale de paramètres $\mu = 43$ et $\sigma = 3$ et que le temps de trajet en bus suit la loi normale de paramètres $\mu = 38$ et $\sigma = 15$.

1) Quel est le temps moyen de parcours avec chacun des moyens de transport ?
2) Hiluphekile dispose de 45 minutes pour aller à son travail.
   Quel moyen de transport lui conseiller s'il ne souhaite pas arriver en retard ?
3) Quel moyen de transport lui conseiller au retour ?

Exercice 11 : quelle loi suit la variable aléatoire ?.

X suit une loi normale de paramètres $\mu = 10$ et σ.
On sait que $P(X \leqslant 11) = 0{,}8$.

1) Quelle loi suit la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - 10}{\sigma}$?
2) Déterminer la valeur de t tel que $P(Z \leqslant t) = 0{,}8$.
3) En déduire la valeur de σ.

Exercice 12 : un fabricant de yaourts brassés.

Un fabricant de yaourts brassés utilise une machine pour remplir ses pots, dont la masse affichée est de 125 g. La masse de yaourt X introduite dans chaque pot suit la loi $\mathcal{N}(125\ ;\ 2^2)$ et un pot est déclaré conforme s'il contient au moins 122 g de yaourt brassé.

1) Quelle est la probabilité qu'un yaourt soit conforme ?
2) Le gérant souhaite modifier les réglages de la machine pour diminuer le nombre de pots non conformes. Il souhaite obtenir 97 % de yaourts conformes, sans changer la quantité moyenne de yaourt introduite dans les pots.
   On suppose que la masse X de yaourt suit toujours une loi normale d'espérance $\mu = 125$. On note σ' la nouvelle valeur de l'écart-type.
   a) Soit $Z = \dfrac{X - 125}{\sigma'}$. Quelle loi suit Z ?
   b) Expliquer pourquoi $122 \leqslant X \Leftrightarrow -\dfrac{3}{\sigma'} \leqslant Z$.
   c) En déduire la valeur de σ'.
3) Un ingénieur lui a indiqué qu'il ne pourrait pas modifier l'écart-type, mais uniquement la moyenne. En prenant $\sigma = 2$, quelle quantité μ' de yaourt doit-être introduite pour obtenir 97 % de yaourts conformes ?

Exercice 13 : temps de trajet pour venir au lycée.

Frej a remarqué qu'il mettait en moyenne 20 minutes pour venir à son lycée. On suppose que la durée (en minutes) de son trajet, notée X, suit une loi normale de paramètres $\mu = 20$ et σ inconnu.

1) Chaque jour, il a cours à 8h. Il décide de partir à 7h40. Quelle est la probabilité qu'il arrive à l'heure ?
2) Ses parents étant peu satisfaits de son assiduité aux cours, il décide de partir à 7h30. Il remarque alors qu'il est en retard avec une probabilité de 0,022 8. Quelle est la valeur de σ ? On arrondira à 10^{-2} près et on utilisera cette valeur approchée dans la suite.
3) Suite à un ultimatum donné par ses parents, il désire arriver à l'heure dans 99 % des cas. À quelle heure devra-t-il partir ?
4) Peut-il arriver à l'heure à coup sûr ?

Exercice 14 : une entreprise fabrique des rondelles métalliques.

Une entreprise fabrique des rondelles métalliques. Une rondelle est conforme si son diamètre est compris entre 5 et 7 millimètres.

On suppose que le diamètre, en millimètre, d'une rondelle suit la loi $\mathcal{N}(6\,;\;0{,}5^2)$.

1) Déterminer la probabilité qu'une rondelle soit conforme. Arrondir au millième.
2) On suppose que la production de chaque rondelle est indépendante des autres.
   À combien de rondelles non conformes peut-on s'attendre dans un stock de 500 000 ?
3) Le directeur général veut améliorer la qualité de la production.
   Il souhaite diviser le nombre de rondelles non conforme par deux, en utilisant des machines plus régulières.
   Quelle nouvelle valeur de l'écart-type σ doit-il viser ?
   Arrondir au centième.

Exercice 15 : modélisation du temps de parcours d'un marathon.

Pour des raisons de logistique, les organisateurs d'un marathon ont décidé de modéliser le temps de parcours (en heure) de chacun des 2 000 participants par la loi normale de paramètres $\mu = 3{,}5$ et $\sigma = 0{,}5$.

1) Les organisateurs ont décidé d'installer le ruban sur la ligne d'arrivée deux heures après le départ du marathon.
Selon ce modèle, quel est la probabilité qu'un coureur pris au hasard termine la course avant l'installation du ruban ?

2) Les organisateurs souhaitent commencer la cérémonie de remise des médailles pour les trois premiers coureurs quand 95 % des coureurs seront arrivés.
Au bout de combien de temps doivent-ils prévoir de le faire ?

Exercice 16 : déterminer les probabilités et la valeur du réel t.

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
Dans l'exercice, on arrondira les résultats au millième.

1) Déterminer les probabilités suivantes.

a) $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$

b) $P(X \leqslant 0{,}5)$

c) $P(X > -0{,}5)$

d) $P(-1 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$

e) $P(X \geqslant 1)$

f) $P(X < -2)$

> Pour calculer $P(X \leqslant a)$ ou $P(a \leqslant X)$, on peut calculer respectivement $P\left(-10^{99} \leqslant X \leqslant a\right)$ ou $P\left(a \leqslant X \leqslant 10^{99}\right)$ avec une calculatrice.

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du réel t telle que :

a) $P(X < t) = 0{,}8$

b) $P(X > t) = 0{,}9$

c) $P(0 \leqslant X \leqslant t) = 0{,}15$

d) $P(-t < X < t) = 0{,}4$

Exercice 17 : une variable aléatoire Y suivant la loi normale centrée réduite.

On considère une variable aléatoire Y suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$ et a est un réel tel que $P(Y < a) = 0{,}7$.

Déterminer les probabilités suivantes.

1) $P(Y \leqslant a)$
2) $P(Y > a)$
3) $P(Y \geqslant -a)$
4) $P(0 \leqslant Y \leqslant a)$
5) $P(Y \leqslant -a)$

Exercice 18 : une variable aléatoire X suivant une loi normale.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$. On sait que $P(X < 14) = 0{,}066\,8$ et $P(X \geqslant 27) = 0{,}04$.

1) Quelle loi suit $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$?
2) a) Montrer que $X < 14 \Leftrightarrow Z < \dfrac{14-\mu}{\sigma}$.
   b) Déterminer le réel t tel que $P(Z < t) = 0{,}066\,8$. Arrondir au centième.
   c) En déduire que $14 = -1{,}5\sigma + \mu$.
3) Traduire de même $P(X \geqslant 27) = 0{,}04$ par une égalité portant sur μ et σ en arrondissant au centième.
4) En déduire les valeurs de μ et σ.

Exercice 19 : déterminer, en arrondissant, h et t.

On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Déterminer, en arrondissant au centième, h et t tels que :

1) $P(Z < 6t) = 0{,}99$
2) $P(-2h < Z < 2h) = 0{,}95$

Exercice 20 : une puce qui effectue un saut en longueur.

Une puce qui se trouve sur l'origine d'un axe gradué en décimètre se prépare à effectuer un saut en longueur vers un autre point de l'axe.
On suppose que l'abscisse du point où retombe la puce suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
On arrondira les résultats au millième.

1) Déterminer $P(-1 \leqslant X < 2)$.
2) Quelle est la probabilité que la puce retombe à son point de départ ?
3) Quelle est la probabilité que la puce parcourt plus de 1 dm ?
4) Un chat souhaite éviter que la puce ne retombe sur lui après son saut. À quelle distance doit-il se placer de la puce pour avoir 99 % de chance de l'éviter ?