Exercices sur probabilité et loi à densité .

Exercice 1 : variable aléatoire modélisant une trotteuse.

Lorsqu'il joue à son jeu favori et qu'il doit prendre une décision au hasard, Paul regarde sa montre et si la trotteuse indique entre 45 et 60 secondes, il répond par l'affirmative.

1) Quelle loi suit la variable aléatoire modélisant la valeur donnée par la trotteuse (en supposant son mouvement continu et uniforme) ?
2) Quelle est la probabilité qu'il réponde de manière affirmative ?

Exercice 2 : loi de densité d'une loi uniforme.

Donner la fonction de densité de la loi uniforme :

1) $\mathscr{U}([-1\,;\,1])$
2) $\mathscr{U}([0\,;\,120])$
3) $\mathscr{U}([-10\,;\,20])$
4) $\mathscr{U}([-0{,}1\,;\,0{,}3])$

Exercice 3 : variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

Y est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}001$.
Calculer sous forme exacte :

1) $P(Y < 1\,500)$
2) $P(400 \leqslant Y \leqslant 2\,000)$
3) $P(Y \geqslant 1\,000)$
4) $P_{Y>1\,000}(Y > 2\,000)$

Exercice 4 : calculer une espérance.

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ de densité f. On sait que $f(0) = 0{,}5$.

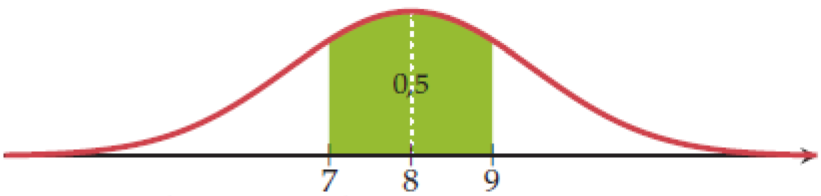
1) Déterminer la valeur de λ.
2) Que vaut $E(X)$?

Exercice 5 : une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.

Une variable aléatoire D suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que $P(D > 3) = \mathrm{e}^{-0{,}9}$.

1) Déterminer λ.
2) Calculer $P(D \leqslant 2)$.

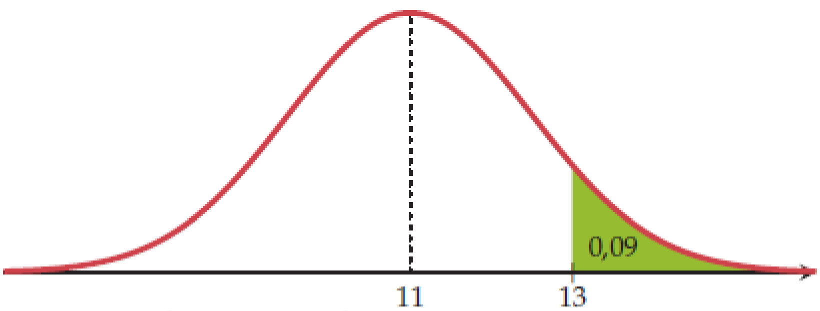
Exercice 6 : déterminer les probabilités suivantes.



Déterminer les probabilités suivantes.

1) $P(8 < X < 9)$
2) $P(X \geqslant 9)$
3) $P(X \leqslant 9)$
4) $P_{(X>7)}(X \leqslant 8)$

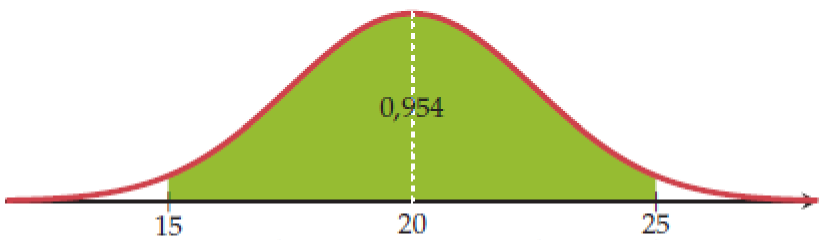
Exercice 7 : calculer la valeur des différentes probabilités.



Déterminer les probabilités suivantes.

1) $P(Y \leqslant 9)$
2) $P(11 < Y \leqslant 13)$
3) $P(Y \geqslant 9)$
4) $P_{(Y>9)}(Y \leqslant 13)$

Exercice 8 : déterminer une valeur approchée.



Déterminer une valeur approchée de μ et de σ.

Exercice 9 : déduire des probabilités sans la calculatrice.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres $\mu = 5$ et σ inconnu telle que $P(-7 \leqslant X \leqslant 17) \approx 0{,}997$.

1) Déterminer une valeur approchée de σ.

2) En déduire les probabilités suivantes sans utiliser une calculatrice.

   a) $P(1 \leqslant X < 9)$ b) $P(5 < X < 9)$

Exercice 10 : calculer des probabilités sans calculatrice.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(3\,;\,\sigma^2)$ et telle que $P(X < 1) = 0{,}4$.

Déterminer les probabilités suivantes sans calculatrice.

1) $P(1 \leqslant X < 3)$ 2) $P(X > 5)$ 3) $P_{(X<5)}(X \geqslant 1)$

Exercice 11 : calculer P(x<5) sans calculatrice.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres μ inconnu et $\sigma = 2$ telle que $P(X \geqslant 11) \approx 0{,}001\,5$.

1) Déterminer μ.

2) En déduire $P(X < 5)$ sans calculatrice.

Exercice 12 : une fonction de densité et probabilités.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x$.

1) Montrer que f est une fonction de densité sur $[0\,;\,2]$.

2) Soit X la variable aléatoire admettant f pour densité.

Calculer les probabilités suivantes :

a) $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$

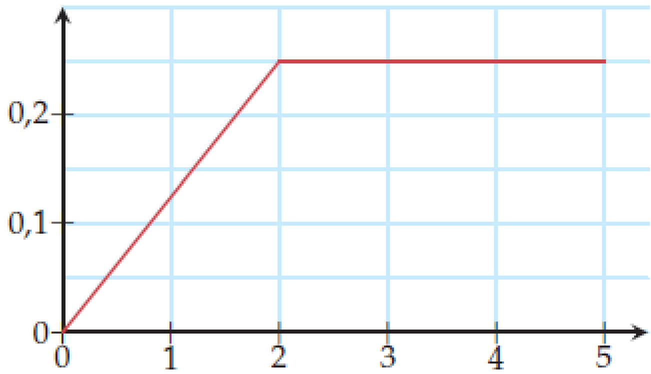
b) $P(X \leqslant 1)$

c) $P(X > 1)$

d) $P(0 \leqslant X \leqslant 2)$

Exercice 13 : une variable X avec sa fonction de densité.

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $[0\,;\,5]$ est représentée ci-dessous :



Déterminer :

1) $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$

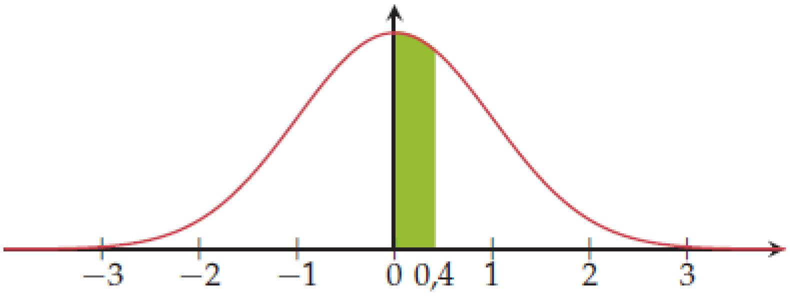
2) $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$

3) $P(1 \leqslant X \leqslant 4)$

4) $P(X < 3)$

Exercice 14 : courbe représentative d'une fonction de densité.

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ est représentée ci-dessous :



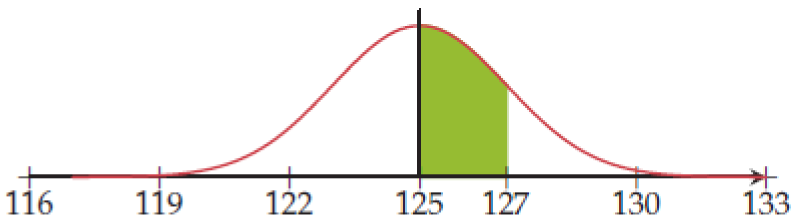
On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}4) = 0{,}155$.

Donner une valeur approchée de :

1) $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0)$
2) $P(X > 0{,}4)$
3) $P(X \leqslant 0{,}4)$
4) $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}4)$

Exercice 15 : représentation d'une fonction de densité.

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ est représentée ci-dessous :



On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$ (tracée ci-dessus) et que $P(125 \leqslant X \leqslant 127) = 0{,}341$.

Donner une valeur approchée de :

1) $P(123 \leqslant X \leqslant 125)$
2) $P(X > 125)$
3) $P(X \leqslant 123)$
4) $P(127 \leqslant X)$

Exercice 16 : algorithme et espérance aléatoire.

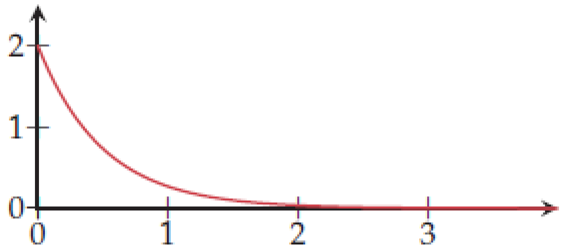
On considère l'algorithme suivant :

Liste des variables utilisées
`P,c,d` : *réels*
Traitement
Afficher "Donner les valeurs c et d d'un intervalle $[c\ ;\ d]$"
Afficher "c et d sont deux nombres entre 0 et 60"
Demander `c`
Demander `d`
Donner à `P` la valeur $\dfrac{d-c}{60-0}$
Sortie
Afficher la valeur de `P`

1) À quoi sert cet algorithme ?
2) Modifier cet algorithme pour qu'il demande des valeurs pour un intervalle $[a\ ;\ b]$ et qu'il calcule des probabilités pour une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$.
3) Que faut-il ajouter à ce nouvel algorithme pour qu'il calcule aussi l'espérance de cette variable aléatoire ?

Exercice 17 : une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle.

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. La courbe de la fonction densité correspondante est donnée ci-dessous. Le point de coordonnées $A(0\ ;\ 2)$ appartient à cette courbe.



1) Déterminer la valeur de λ.

2) L'égalité $P(X < 0{,}5) = P(X \geqslant 0{,}5)$ est-elle vraie ?

3) Déterminer la valeur de t pour laquelle $P(X < t) = P(X \geqslant t)$.

Exercice 18 : une variable aléatoire X suit la loi uniforme.

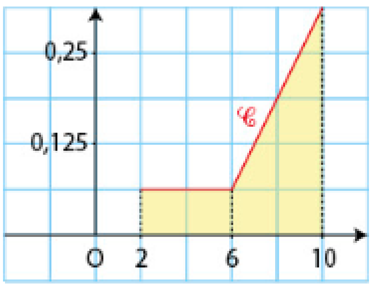
Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0\ ;\ 100]$.

1) Que vaut $P(X < 20)$?

2) Calculer $E(X)$.

Exercice 19 : probabilité et fonction définie sur un intervalle.

f est la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;10]$ par la courbe $\mathscr{C}$ ci-contre.



1. Justifier que la fonction f est une densité de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

2. Calculer :

a) $P(2 \leqslant X \leqslant 8)$; **b)** $P(X > 4)$.

3. A-t-on $P(X \leqslant 8) = P(X > 8)$? Justifier.

Exercice 20 : variable aléatoire et loi de probabilité.

T est une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle $[0\,;1]$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f définie par $f(x) = 4x^3$.

1. Calculer la valeur exacte de chaque probabilité.

a) $P(X \leqslant 0,2)$ **b)** $P(0,1 \leqslant X \leqslant 0,8)$ **c)** $P(X > 0,6)$

2. Déterminer le nombre réel a de l'intervalle $[0\,;1]$ tel que $P(X < a) = 0,25$.

Exercice 21 : loi de probabilité et densité.

X est une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f définie par $f(x) = 2e^{-2x}$.

Calculer $P(n \leqslant X \leqslant n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.