Exercices sur probabilités et variables aléatoires .

Exercice 1 : déterminer des événements contraires.

X est une variable aléatoire. Déterminer les événements contraires de :

1) $(X > 5)$;
2) X est supérieur ou égal à 2 ;
3) $(X \leq 3)$;
4) X est inférieur ou égal à 4.

Exercice 2 : donner l'affirmation contraire.

Donner l'affirmation contraire de :

1) « Tous les élèves de la classe seront admis au bac » ;
2) « Paul mange tous les jours à la cantine » ;
3) « Je ne vais jamais au cinéma le dimanche » ;
4) « Chaque élève de la classe possède un téléphone portable ».

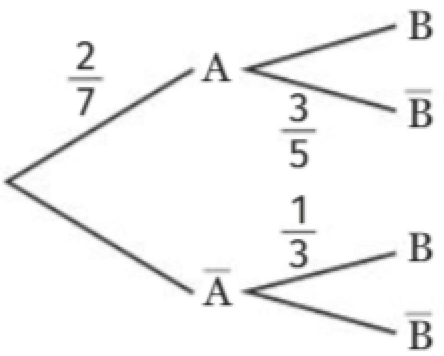
Exercice 3 : loi de probabilité.

Calculer a pour que le tableau définisse bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,15	0,2	a	0,05	0,35

Exercice 4 : calculer des probabilités.

On considère deux événements A et B et l'arbre de probabilité suivant.



1. Quelles sont les probabilités données ?

2. Déterminer les probabilités manquantes.

3. En déduire $P(B)$.

Exercice 5 : calculer la probabilité de AUB.

On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}3$, $P(A \cap B) = 0{,}2$ et $P(B) = 0{,}6$.

Calculer $P(A \cup B)$, $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

Exercice 6 : des événements indépendants ?.

On considère les événements A et B de probabilités respectives $\frac{7}{8}$ et $\frac{2}{7}$ et tels que $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 7 : calculer deux probabilités.

On considère deux événements A_1 et A_2 dont les probabilités sont données dans le tableau suivant.

	A_1	$\overline{A_1}$	Total
A_2		0,15	
$\overline{A_2}$			0,8
Total	0,7		1

1. Recopier et compléter le tableau.

2. En déduire $P_{A_1}(A_2)$ et $P_{A_2}(A_1)$.

Exercice 8 : calculer la probabilité conditionnelle.

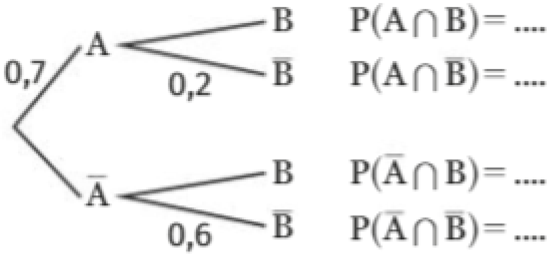
Deux événements A et B vérifient $P(A) = 0{,}45$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}9$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.

2. En déduire $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

Exercice 9 : un arbre de probabilités.

On considère deux événements A et B dont les probabilités sont données dans l'arbre suivant.



1. Recopier et compléter l'arbre.

2. Calculer $P(B)$.

Exercice 10 : probabilités indépendantes.

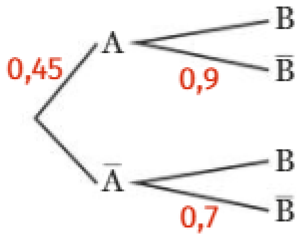
Les événements A et B de probabilités respectives 0,5 et 0,7 sont indépendants.

1. Calculer $P(A \cap B)$.

2. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$ de deux manières différentes.

Exercice 11 : calculer la probabilité d'issues.

On considère deux événements A et B dont les probabilités sont données dans l'arbre suivant.



1. Calculer $P_A(B)$.

2. Calculer $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

3. Calculer la probabilité de chacune des issues $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $P(\overline{A} \cap B)$.

Exercice 12 : tableau et probabilités.

On considère une expérience aléatoire et deux événements A et B. Les probabilités de A et B sont récapitulées dans le tableau suivant.

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,2	0,3	
$\overline{A}$	0,1		
Total			1

1. Reproduire et compléter le tableau.

2. Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

3. Calculer $P_B(\overline{A})$.

Exercice 13 : problème des haltérophiles.

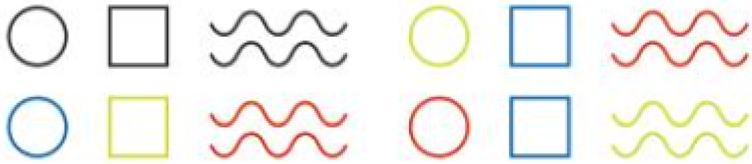
Vincent et Anne sont haltérophiles. La probabilité que Vincent soulève plus de 100 kg est égale à 0,75, alors que la probabilité qu'Anne soulève plus de 100 kg est égale à 0,6. La probabilité qu'au moins l'un des deux soulève plus de 100 kg est égale à 0,85.

1. Quelle est la probabilité qu'ils soulèvent 100 kg tous les deux ?

2. Anne vient de voir Vincent soulever 100 kg. Quelle est la probabilité qu'elle-même soulève 100 kg ?

Exercice 14 : des figures de différentes couleurs.

On choisit au hasard une figure parmi les suivantes.
Chaque figure a la même probabilité d'être choisie.



On considère les événements suivants :

- V : « la figure est verte » ;
- R : « la figure est rouge » ;
- N : « la figure est noire » ;
- B : « la figure est bleue » ;
- C : « la figure est un cercle » ;
- K : « la figure est un carré » ;
- Z : « la figure fait des vagues ».

1. Modéliser cette situation par un tableau.

2. Calculer $P_C(V)$ et $P_B(Z)$.

3. Calculer $P_R(Z)$ et $P_K(B)$.

Exercice 15 : un dé non truqué à six faces.

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le résultat obtenu.

Si le résultat est pair, on lance un dé non truqué à 20 faces numérotées de 1 à 20.

Si le résultat est impair, on lance un dé non truqué à huit faces numérotées de 1 à 8.

Quelle est la probabilité pour que le résultat du deuxième dé soit un nombre premier ?

Exercice 16 : manger de la purée.

Dans la famille Patate, la probabilité de manger de la purée un jour donné est égale à 0,3 si on en a mangé la veille, alors qu'elle est égale à 0,8 si on n'en a pas mangé la veille. Le dimanche, la famille Patate ne mange jamais de purée.

On notera les événements suivants :

- L : « la famille mange de la purée lundi » ;
- M : « la famille mange de la purée mardi ».

Quelle est la probabilité que la famille Patate mange de la purée le mardi ?

Exercice 17 : un jeu de 32 cartes.

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Dans chacun des cas suivants, dire si les événements sont indépendants.

1. A : « tirer un roi » et B : « tirer un rouge » ;
2. A : « tirer un roi » et B : « ne pas tirer un as » ;
3. A : « tirer un roi ou tirer une dame rouge » et B : « tirer un rouge ».

Exercice 18 : croisement et feu tricolore.

À un croisement, se trouve un feu tricolore dont les feux sont alternativement vert, rouge ou orange avec des probabilités respectives de 0,4 ; 0,5 et 0,1. Des cyclistes empruntent régulièrement ce croisement et une étude statistique a permis de déterminer les résultats suivants :

- si le feu est vert, le cycliste passe avec une probabilité de 1 ;
- si le feu est orange, le cycliste passe avec une probabilité de 0,1 ;
- si le feu est rouge, le cycliste passe avec une probabilité de 0,02.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.

2. Calculer la probabilité que le cycliste ne s'arrête pas au feu tricolore.

3. Calculer la probabilité que le feu soit vert, sachant que le cycliste ne s'est pas arrêté au feu.

Exercice 19 : déplacement d'une fourmi sur des cases.

Une fourmi se déplace sur les cases ci-dessous en partant de la case A. Pour son premier mouvement elle se déplace vers la droite ou la gauche avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Si elle se déplace à droite, elle ira à nouveau à droite avec une probabilité de 60 %. Si elle se déplace à gauche, elle ira à nouveau à gauche avec une probabilité de 80 %.

		A		

Quelle est la probabilité que la fourmi sorte du quadrillage après le troisième mouvement ?

Exercice 20 : ruche et frelon asiatique.

Chaque année, une ruche a un risque de 5 % d'être attaquée par un frelon asiatique. Dans ce cas, ses chances de survie sont de 10 %. Si la ruche n'est pas attaquée, ses chances de survie sont de 90 %. Chaque année, le risque d'attaque est le même et les attaques sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que la ruche survive trois ans ?

2. Quelle serait cette même probabilité si la menace du frelon asiatique n'existait pas ?

Exercice 21 : coupe du monde de football.

On considère les 23 joueurs de football ayant gagné la coupe du monde 2018 selon leur poste et selon s'ils jouaient en France ou à l'étranger durant cette saison 2017-2018 :

	France	Étranger	Total
Gardien	2	1	3
Défenseur	3	5	8
Milieu	1	5	6
Attaquant	3	3	6
Total	9	14	23

On tire au hasard un joueur parmi les 23 et on considère les événements :

- G : « Le joueur est gardien. »
- D : « Le joueur est défenseur. »
- M : « Le joueur est milieu. »
- A : « Le joueur est attaquant. »
- F : « Le joueur joue en France. »

1. Calculer $p(G)$ et $p(F)$.
2. Calculer $p_M(F)$, $p_F(M)$ et $p_F(A)$.
3. Calculer $p_G(\overline{F})$ et $p_{\overline{F}}(D)$.
4. Calculer $p_{\overline{G}}(M)$.
5. Trouver une probabilité conditionnelle égale à $\frac{5}{8}$.
6. Calculer $p_{G \cup D}(F)$ et $p_{\overline{F}}(M \cup A)$.

Exercice 22 : les pantalons de Gani.

La répartition des pantalons de Gani est donnée par le tableau ci-dessous :

	Habillé	Décontracté	Total
Bleu	5	8	13
Noir	3	6	9
Rouge	0	2	2
Total	8	16	24

Il prend un pantalon au hasard dans son armoire et on considère les événements :

- B : « Le pantalon est bleu. »
- N : « Le pantalon est noir. »
- R : « Le pantalon est rouge. »
- D : « Le pantalon est décontracté. »

Les événements suivants sont-ils indépendants ?

a) B et D
b) R et $\overline{D}$
c) N et D
d) N et $\overline{D}$

Exercice 23 : la boîte aux lettres de Justin.

Justin vérifie sa boîte à lettres tous les soirs et la probabilité qu'il y ait du courrier est 0,47. On admet que la présence de courrier ou non dans sa boîte à lettres un soir n'a pas d'influence sur celle du soir suivant.

1. Pourquoi peut-on penser que la répétition de cette épreuve deux soirs consécutifs est une succession de deux épreuves indépendantes ?
2. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre.
3. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un tableau à double entrée.

Exercice 24 : ornella et Fanny.

Ornella et Fanny sont allées boire un verre et, au moment de partir, elles décident de laisser un pourboire.
Pour cela, Ornella prend une pièce au hasard dans sa poche qui contient deux pièces de 0,50 euro et une de 1 euro puis Fanny prend une pièce au hasard dans son porte-monnaie qui contient trois pièces de 0,20 euro, une de 1 euro et une de 2 euros.

1. Pourquoi peut-on penser que ces deux tirages sont une succession de deux épreuves indépendantes ?

2. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre.

3. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un tableau à double entrée.

Exercice 25 : la production d'une entreprise.

La production d'une entreprise de matériel mathématique est composée à 70 % d'équerres et à 30 % de rapporteurs.
Suite à un problème en usine, 20 % des équerres ont des défauts et 30 % des rapporteurs n'en ont pas.
Représenter la situation par un arbre pondéré après avoir énoncé les événements y apparaissant.

Exercice 26 : l'association sportive du lycée.

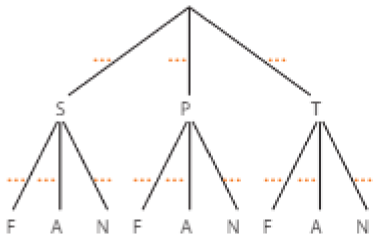
Dans l'association sportive d'un lycée, il y a :

- 24 % d'élèves de Seconde dont 12 % font du football, 45 % de l'athlétisme et 43 % de la natation ;
- 61 % d'élèves de première dont 34 % font du football, 44 % de l'athlétisme et 22 % de la natation ;
- 15 % d'élèves de terminale dont 41 % font du football, 9 % de l'athlétisme et 50 % de la natation.

On prend un élève de l'association sportive et on considère les événements :

- S (resp. P, resp. T) : « Cet élève est en Seconde (resp. première, resp. terminale). »
- F (resp. A, resp. N) : « Cet élève pratique le football (resp. l'athlétisme, resp. la natation). »

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



2. a) Déterminer $p(N \cap S)$.

b) Déterminer $p(N)$.

c) En déduire $p_N(S)$.

3. On considère un élève qui se rend à la piscine pour faire de la natation.
Est-il plus probable que ce soit un élève de seconde, première ou terminale ?

4. a) Déterminer $p(A \cup N)$.

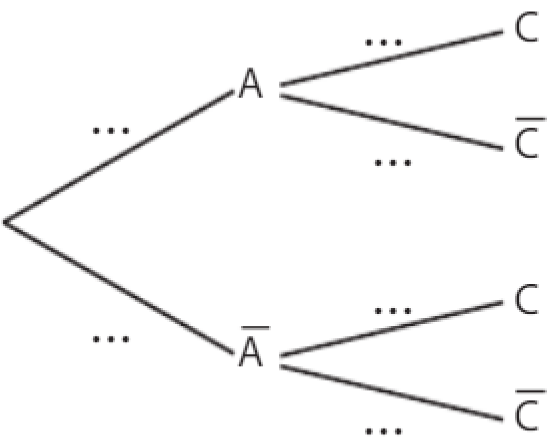
b) Déterminer la probabilité que l'élève soit en seconde ou qu'il fasse du football.

Exercice 27 : le cuisinier d'une colonie de vacances.

Le cuisinier d’une colonie de vacances a confectionné des beignets pour le goûter :

- 30 % des beignets sont à l’ananas, les autres sont aux pommes ;
- 35 % des beignets à l’ananas sont aromatisés à la cannelle, ainsi que 45 % des beignets aux pommes.

On choisit un beignet au hasard et on définit les événements A : « Le beignet choisi est à l’ananas » et C : « Le beignet choisi est aromatisé à la cannelle ».



1. Reproduire et compléter l’arbre pondéré ci-contre.

2. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice 28 : la chorale et les probabilités.

Dans la chorale d'un lycée, il y 7 élèves de seconde, 9 élèves de première et n élèves de terminale.
De plus, parmi les élèves de seconde, il n'y a qu'une seule fille, contre 3 parmi les élèves de première et 6 parmi les élèves de terminale. On tire au sort un élève de la chorale.

Pour quelle(s) valeur(s) de n les événements « L'élève est en terminale » et « L'élève est une fille » sont-ils indépendants ?

Exercice 29 : une collection d'éléphants et des probabilités.

Annie a une collection d'éléphants miniatures dont la répartition est donnée ci-dessous.

	Noir	Couleur	Total
Bois	17	84	101
Pierre	31	60	91
Métal	8	24	32
Total	56	168	224

Chaque semaine, elle tire au sort un éléphant pour le mettre sur son bureau au travail.

On considère les événements :

- N : « L'éléphant est noir. »
- B : « L'éléphant est en bois. »
- M : « L'éléphant est en métal. »

1. Calculer les probabilités suivantes.

a) $p_B(N)$ **b)** $p_{\overline{N}}(B)$ **c)** $p_{B \cup M}(N)$

2. Les événements N et M sont-ils indépendants ?

3. Les événements N et B sont-ils indépendants ?

Exercice 30 : saumonix le poissonier.

Saumonix est poissonnier et 15 % du poisson qu'il vend a été pêché par ses soins, 30 % vient d'un grossiste normand et le reste d'un grossiste de Paris.

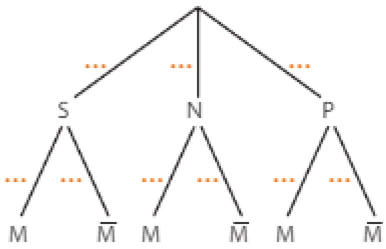
Il a remarqué que 5 % de ses clients sont mécontents du poisson qu'il a lui-même pêché, 10 % du poisson provenant du grossiste normand et 90 % du poisson de Paris.

Un client achète un poisson à Saumonix.

On considère les événements suivants :

- S : « Le poisson a été pêché par Saumonix. »
- N : « Le poisson provient du grossiste normand. »
- P : « Le poisson provient du grossiste de Paris. »
- M : « Le client est mécontent du poisson. »

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. a) Calculer $p(P \cap M)$ et $p(M)$.

b) Les événements S et M sont-ils indépendants ?

c) Un client est mécontent du poisson acheté.

Quelle est la probabilité que ce poisson ait été pêché par Saumonix ?

3. Saumonix souhaite ramener le taux de mécontentement à 30 % en continuant à pêcher 15 % de sa production. Déterminer les proportions de poisson qu'il doit commander à chaque grossiste pour atteindre son objectif.

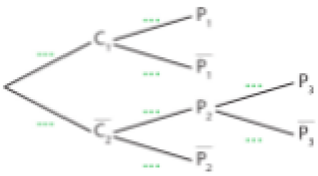
Exercice 31 : chemins et arbre de probabilités.

Pour se rendre dans le centre-ville, Bruce peut prendre deux chemins :

- l'un passe une fois au-dessus du fleuve de sorte qu'il faut passer sur un pont P_1 dont la probabilité d'être fermé est 0,2, auquel cas, il ne peut pas se rendre au centre-ville.
- l'autre passe deux fois au-dessus du fleuve de sorte qu'il faut passer sur deux ponts P_2 et P_3 dont les probabilités d'être fermés sont 0,1 (on admet que la fermeture ou non d'un pont est indépendante de l'autre et du chemin emprunté par Bruce). Si au moins l'un des deux ponts est fermé, il ne peut pas se rendre au centre-ville.

Quand Bruce va au centre-ville, il passe par le premier chemin 80 % du temps (sans avoir d'information sur le fait que les ponts soient ouverts ou non).

1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation. On décrira les différents événements présents par des phrases.



2. En admettant qu'on peut utiliser les règles classiques sur les arbres pondérés, déterminer la probabilité que Bruce soit bloqué par un pont.

3. Bruce est bloqué par un pont. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le premier chemin ?

Exercice 32 : vacances à Istanbul et probabilités.

Pour les prochaines vacances de Yannis, tout est presque réglé : ses parents lui ont assuré qu'il y a 90 % de chances que la famille parte à Istanbul.
Par ailleurs, Yannis a constaté que pendant cette période de vacances, la probabilité qu'il ne pleuve pas s'il va à Istanbul est 0,85.
Quelle est la probabilité qu'il parte à Istanbul pour ses prochaines vacances et qu'il n'y pleuve pas ?

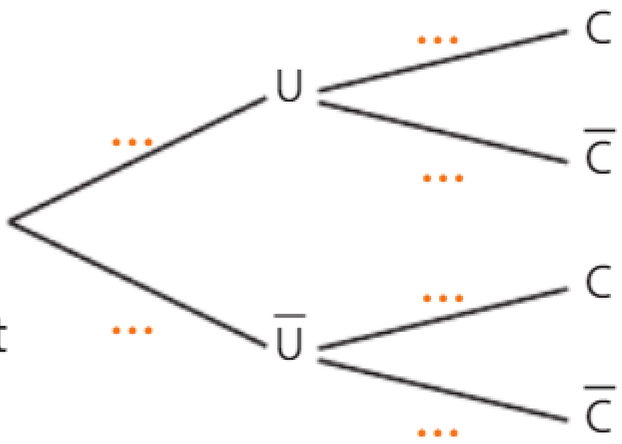
Exercice 33 : une entreprise de plomberie.

Émilie a une entreprise de plomberie.

75 % de ses interventions sont programmées, le reste est « en urgence ». Pour les interventions programmées, elle utilise son chalumeau 85 % du temps contre 90 % pour les interventions d'urgence.

Émilie part chez un client, on considère les événements :

- U : « L'intervention est en urgence. »
- C : « Émilie va devoir utiliser son chalumeau. »



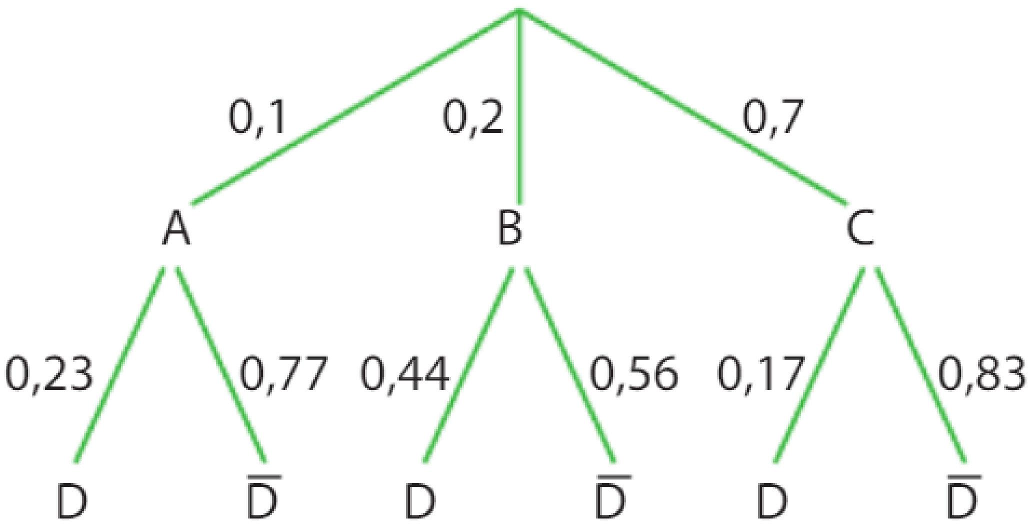
1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation.

2. Calculer $p(U \cap C)$ et $p(\overline{U} \cap C)$.

3. Déterminer la probabilité qu'Émilie doive utiliser son chalumeau pour cette intervention.

Exercice 34 : arbre de probabilités et partition de l'univers.

Pour des événements A, B, C et D tels que A, B et C forment une partition de l'univers, on considère la situation représentée par l'arbre pondéré ci-dessous :



1. Les événements A et D sont-ils indépendants ?
2. Les événements B et D sont-ils indépendants ?

Exercice 35 : arbre pondéré et événements.

On considère deux événements A et B et l'arbre pondéré associé ci-dessous.
Déterminer p pour que les événements A et B soient indépendants.