Exercices sur produit scalaire dans l'espace .

Exercice 1 : déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x+y+2z-3=0 \quad \text{et} \quad -x+4y-5z+6=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

Même consigne qu'à l'exercice avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

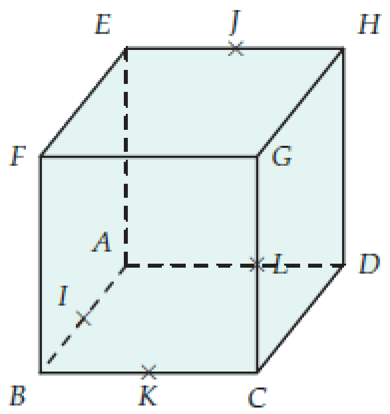
$$x-2z-1=0 \quad \text{et} \quad y-2z+4=0.$$

Même consigne qu'à l'exercice avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x-y-2z-1=0 \quad \text{et} \quad -2x+2y+4z+4=0.$$

Exercice 2 : démontrer que la droite est orthogonale au plan.

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[EH]$, K celui de $[CB]$ et L celui de $[CG]$. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



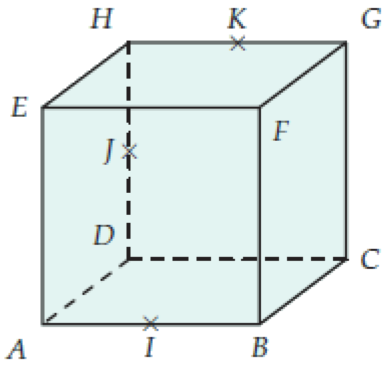
1) a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) En déduire une équation cartésienne de (IJK).

2) Déterminer une équation paramétrique de (FD).

Exercice 3 : démontrer que c'est un vecteur normal du plan.

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[DH]$ et K celui de $[HG]$.
On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal du plan (IJK).
2) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).
3) Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

Exercice 4 : démontrer que les droites ne sont pas parallèles.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A(0;1;-1)$ et $B(-2;2;-1)$;
- la droite (d) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= -2+t \\ y &= 1+t \\ z &= -1-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

On note M un point appartenant à (d), de coordonnées $(-2+u;1+u;-1-u)$, où u est un réel.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2) a) Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.
   b) Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas sécantes.
3) Vérifier que le plan $(\mathscr{P})$ d'équation :

$$x+y-z-3u=0$$

Exercice 5 : déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Partie A

Dans chacun des cas suivants, déterminer si H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$:

1) $(\mathscr{P})$ a pour équation $-2x+3y-z+8=0$;
   a) $A(2\,;2\,;-4)$ et $H(4\,;-1\,;-3)$;
   b) $A(0\,;4\,;-4)$ et $H(2\,;1\,;-3)$.
2) $(\mathscr{P})$ a pour équation $7x-5y-6z+1=0$;
   a) $A(-5\,;5\,;1)$ et $H(9\,;-5\,;13)$;
   b) $A(7\,;-6\,;7)$ et $H(0\,;-1\,;1)$.
3) $(\mathscr{P})$ a pour équation $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z-\frac{1}{5}=0$;
   a) $A(7\,;-2\,;4)$ et $H\left(4\,;0\,;\frac{5}{2}\right)$;
   b) $A\left(-5\,;5\,;-\frac{43}{15}\right)$ et $H\left(1\,;1\,;\frac{2}{15}\right)$.

Partie B

Déterminer, dans chacun des cas suivants, les coordonnées de H, projeté orthogonal du point A sur $(\mathscr{P})$:

1) $(\mathscr{P}) : x+y+z-1=0$ et $A(1\,;1\,;1)$;
2) $(\mathscr{P}) : 2x-3y+4z-5=0$ et $A(1\,;2\,;3)$;
3) $(\mathscr{P}) : -x-2y+11z+5=0$ et $A(-1\,;-4\,;3)$;
4) $(\mathscr{P}) : ax+by+cz+d=0$ et $A(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$.

Exercice 6 : calculer la norme du vecteur normal.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère un point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et un plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.

a) Faire un schéma.

b) Démontrer que si M est un point de $(\mathscr{P})$ distinct de H, alors $AM > AH$.

2) On pose $\overrightarrow{AH} = \lambda \vec{n}$.

a) Démontrer que : $\lambda = -\dfrac{ax_A + by_A + cz_A + d}{\|\vec{n}\|^2}$

b) En déduire une expression de AH en fonction des coordonnées de A, des coefficients a, b, c et d et de $\|\vec{n}\|$.

3) Application.

On reprend la figure de l'exercice où une équation cartésienne de (FHI) est $3x + 3y + 2z - 5 = 0$.

Déterminer les distances des points suivants au plan (FHI) :

a) G ; b) A ; c) B ; d) D.

Exercice 7 : calculer une distance et conjecture dans un logiciel.

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Soient $A(-3\ ;\ 4\ ;5)$ et $B(-4;-1;-1)$ deux points et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

On considère la droite (d) engendrée par A et $\vec{u}$ ainsi que la droite (Δ) engendrée par B et $\vec{v}$.

On cherche deux points K et L tels que $K \in (d)$, $L \in (\Delta)$ et (KL) soit perpendiculaire à (d) et (Δ).

1) Représenter la situation dans un logiciel et conjecturer une solution au problème.
2) On note $\overrightarrow{AK} = k\vec{u}$ et $\overrightarrow{BL} = l\,\vec{v}$, où k et l sont des réels. Déterminer les coordonnées de K, de L puis de $\overrightarrow{KL}$ en fonction de k et l.
3) Démontrer que (KL) est perpendiculaire à (d) et (Δ) si et seulement si :

$$\begin{cases} 2k - l &= -3 \\ -3k + 2l &= 4 \end{cases}$$

4) Résoudre ce système puis en déduire les coordonnées des points K et L.
5) Calculer la distance KL.

Exercice 8 : résoudre ce système avec z comme paramètre.

Dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace, on considère les vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. On cherche les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'un vecteur $\vec{n}$, orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1) Démontrer que x, y et z satisfont le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz & = & 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z & = & 0 \end{cases}$$

2) Résoudre ce système en prenant z comme paramètre, c'est-à-dire en exprimant x et y en fonction de z.

3) En déduire, en choisissant judicieusement une valeur de z, que $\vec{n}\begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix}$ est une solution du problème posé.

> On dit que ce $\vec{n}$ est le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) et on note $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

4) Calculer $\vec{v} \wedge \vec{u}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 9 : cette représentation paramétrique définit-elle un plan?.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on considère la représentation paramétrique suivante :

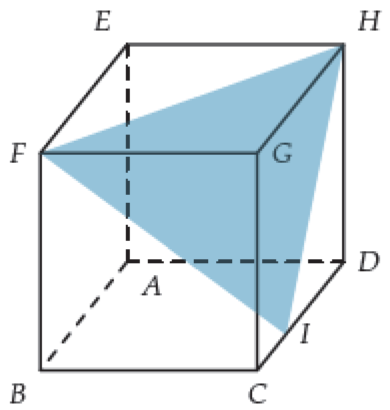
$$\begin{cases} x & = & 1 - s + 4t \\ y & = & 2 + 2s - t \\ y & = & -1 + s + 2t \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1) Cette représentation paramétrique définit-elle un plan ?

2) Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

Exercice 10 : un plan et son équation cartésienne.

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 et le point I tel que $3\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{DC}$.



En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (FHI).

Exercice 11 : déterminer les coordonnées du point d'intersection.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -7+t \\ y & = & 4+2t \quad , \ t \in \mathbb{R} \\ z & = & -5-t \end{array}\right.$$

et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne :

$$-2x - 3y + z - 6 = 0.$$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

Exercice 12 : déterminer une équation cartésienne d'un plan parallèle à un autre.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$, parallèle au plan $(\mathscr{P})$ et passant par le point A lorsque :

1) $(\mathscr{P}) : x+y+z-1=0$ et $A(1;1;1)$;
2) $(\mathscr{P}) : x-3y+2z-4=0$ et $A(3;0;-1)$;
3) $(\mathscr{P}) : \dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{6}y-z-2=0$ et $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{6}\right)$;
4) $(\mathscr{P}) : \sqrt{5}x-2y-\sqrt{2}z-4=0$ et $A(1;1;-1)$.

Exercice 13 : décrire l'ensemble des points M.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, décrire, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :

1) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ avec $A(1;-2;3)$ et $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$;
2) $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}=3$;
3) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{j}=-1$ avec $A(1;-2;3)$;
4) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=5$ avec $A(-2;4;1)$ et $\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$.

Exercice 14 : déterminer une équation cartésienne du plan passant par A.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ lorsque :

1) $A(2;1;0)$ et $B(-4;-1;3)$;
2) $A(4;-5;6)$ et $B(1;-1;1)$;
3) $A(2;-1;0)$ et $B\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{2}{3};1\right)$;
4) $A(1;0;0)$ et $B(1;0;0)$.

Exercice 15 : déterminer les points d'intersection de la sphère de centre A.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1;-2;2)$, $B(1;-5;4)$ et $C(-1;3;-1)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, s'ils existent, les points d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ de centre A et de rayon 3 avec la droite (BC).

1) a) Représenter $\mathscr{S}$ ainsi que (BC) avec un logiciel de géométrie.
   b) Construire leur intersection.
2) a) En procédant de la même façon que pour le cercle en classe de Première S, déterminer une équation de $\mathscr{S}$.
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
3) Résoudre le système composé des équations de $\mathscr{S}$ et de (BC) et en déduire la réponse au problème posé.

Exercice 16 : pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.
On se place dans un repère orthonormé de l'espace. On considère le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$ et la droite (d) dont un représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -5+3t \end{array}\right. , \; t \in \mathbb{R}.$$

On considère aussi les points $A(1;1;0)$, $B(3;0;-1)$ et $C(7;1;-2)$.

Proposition 1

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5-2t \\ y & = & -1+t \\ z & = & -2+t \end{array}\right. , \; t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2

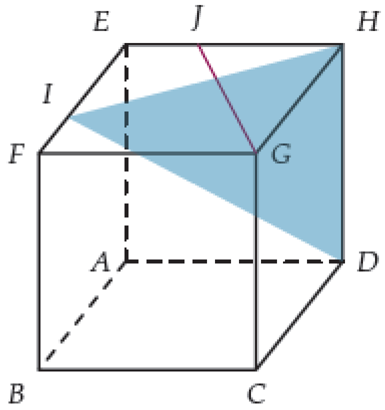
Les droites (d) et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3

Les droites (d) et (AB) sont coplanaires.

Exercice 17 : démontrer que des droites sont parallèles dans un cube.

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.



1) Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH).

2) Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD).

3) En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID).

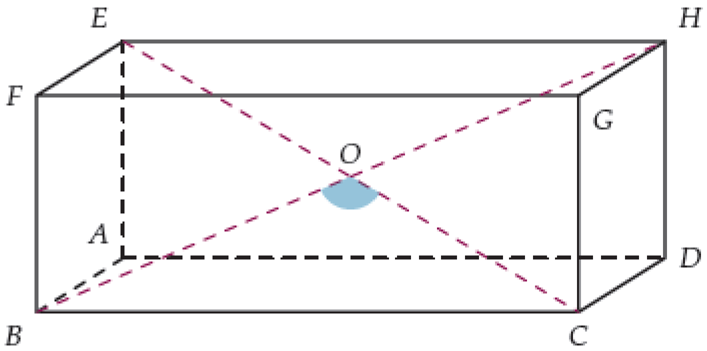
Exercice 18 : déterminer une équation cartésienne du plan.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, soient $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point.

Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$, admettant $\vec{n}$ pour vecteur normal et passant par A est de la forme $ax + by + cz + d = 0$. On donnera a, b, c et d en fonction des coordonnées de $\vec{n}$ et de A.

Exercice 19 : déterminer une mesure de l'angle du parallélépipède.

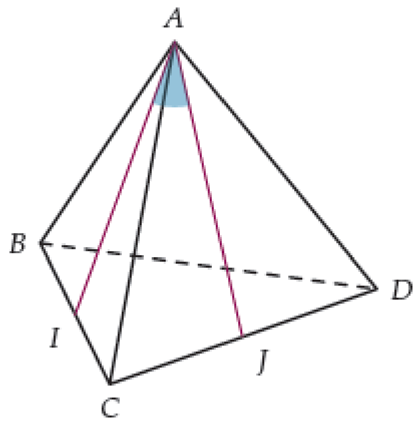
On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$, $AD = 5$ et $AE = 2$. On note O son centre.



En se plaçant dans le repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$, déterminer une mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ au centième de degré près.

Exercice 20 : calculer des longueurs dans un tétraèdre régulier.

On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 2. Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.



1) a) Calculer les longueurs AI, AJ et IJ.

b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.

2) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, au dixième de degré près.

Exercice 21 : déterminer la valeur de k pour que les vecteurs soient orthogonaux.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\k-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\k\\k\end{pmatrix}$, où $k\in\mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

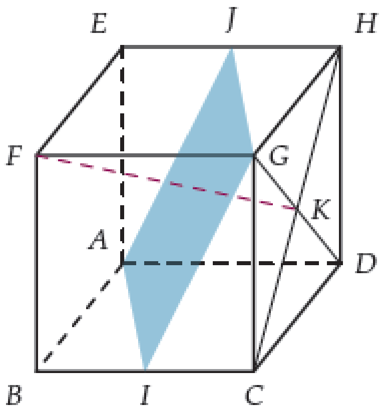
Exercice 22 : déterminer un vecteur orthogonal à un plan.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1;2;1)$, $B(4;6;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.
2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 23 : démontrer que les points A, I, G et J sont coplanaires.

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$ et K le centre de la face $CDHG$.



Sans utiliser de repère :

1) démontrer que les points A, I, G et J sont coplanaires ;

2) a) démontrer que (FK) est orthogonale à (IJ) ;

b) démontrer que (FK) est orthogonale à (AI) ;

c) en déduire que (FK) est orthogonale au plan (AIG).

Exercice 24 : un tétraèdre régulier et produit scalaire.

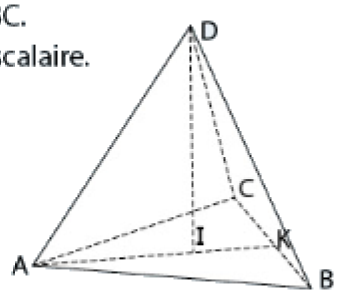
ABCD est un tétraèdre régulier de côté a et I est le centre de la face ABC.

Calculer chaque produit scalaire.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

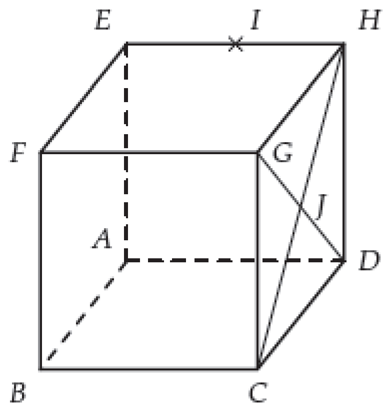
b) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI}$

c) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$



Exercice 25 : exprimer en fonction de a les produits scalaires.

On considère le cube suivant, d'arête $a > 0$ où I est le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

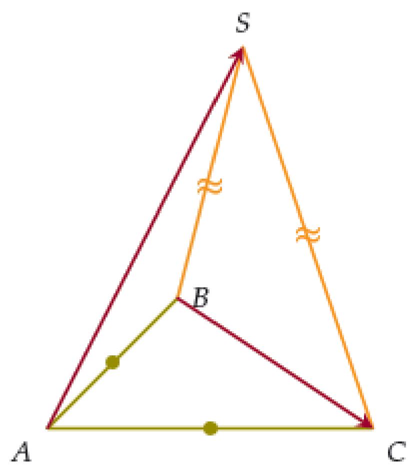


En considérant des décompositions sur les arêtes du cube, exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{FH}$
2) $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IH}$
3) $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{IF}$
4) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EJ}$
5) $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$
6) $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{CH}$

Exercice 26 : déterminer les produits scalaires.

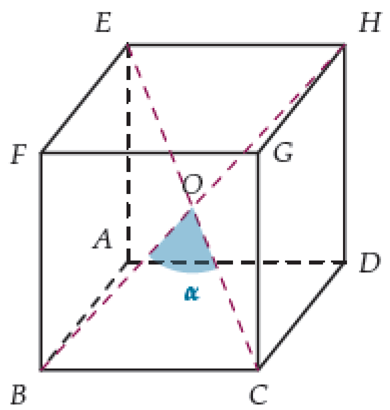
Soit $SABC$ un tétraèdre de tel que les triangles ABC et SBC soient isocèles respectivement en A et S :



Démontrer que $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Exercice 27 : calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle.

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1 et de centre O.



Calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{BOC}$ au degré près.

Exercice 28 : calculer au dixième près, une mesure des angles.

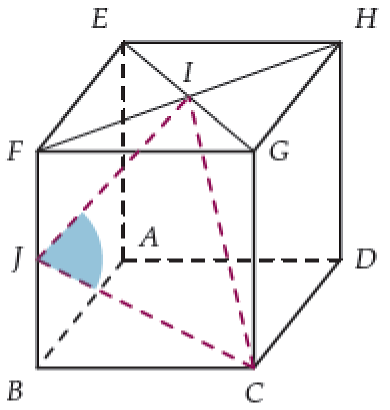
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;-2;3)$, $B(-1;0;1)$ et $C(2;1;0)$.

Calculer, au dixième de degré près, une mesure des angles :

1) $\widehat{ABC}$ **2)** $\widehat{BAC}$ **3)** $\widehat{ACB}$

Exercice 29 : calculer les trois longueurs du triangle.

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J le milieu de l'arête $[BF]$.



On cherche à calculer une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$ au degré près.

1) Méthode géométrique

a) Calculer les trois longueurs du triangle IJC.

b) En déduire que $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{4}$.

c) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.

2) Autre méthode géométrique

a) Calculer $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$ en décomposant astucieusement les deux vecteurs sur les arêtes du cube.

b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.

Exercice 30 : vecteur normal et équation cartésienne d'un plan.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par :

1) $A(2;1;0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{OA}$;

2) $A\left(\sqrt{2};\sqrt{3};2\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AO}$;

3) $A(5;-3;4)$ et de vecteur normal $\vec{k}$;

4) $A(2;-1;\sqrt{3})$ et de vecteur normal $\vec{i} - \dfrac{3}{2}\vec{j}$.

Exercice 31 : plans orthogonaux dans un repère orthonormé.

Dans cet exercice, on va mettre en évidence de façon analytique la remarque de la page 307. On munit l'espace d'un repère orthonormé.

1) Relire cette remarque. À votre avis, quelle est l'erreur courante qui est commise ?

2) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, considérons les plans $(\mathscr{P}) : 2x - 3y - z + 4 = 0$ et $(\mathscr{Q}) : x + 2y - 4z - 5 = 0$.

a) Vérifier que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont bien orthogonaux.

b) Vérifier que $A(1;1;3)$ et $B(-1;-1;5)$ appartiennent à $(\mathscr{P})$.

c) Vérifier que $C(1;6;2)$ et $D(-3;0;-2)$ appartiennent à $(\mathscr{Q})$.

d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ? parallèles ?